TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta pedagogická

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2005 Monika Širůčková

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program: 2. stupeň
Kombinace: matematika – anglický jazyk

GEOMETRIE V UČEBNICÍCH ZŠ - PLANIMETRIE

Geometry in Textbooks at Primary Schools - Planimetry
Geometrie in Schulbücher in der Grundschule - Planimetrie

Diplomová práce: 05–FP–KMD–004
Autor: Monika Širůčková
Podpis:

Adresa:
Zaječice 334
538 35, Zaječice
Vedoucí práce: prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.
Konzultant: PeadDr. Jaroslav Perný, Ph.D.

Počet

stran	slov	obrázků	grafů	tabulek	pramenů	příloh
87	74 820	10	24	16	13	4

V Liberci dne: 20. května 2005

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Tel./Fax: +420.485 352 332

Katedra: *matematiky a didaktiky matematiky*

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(závěrečného projektu)

Diplomant: *Monika ŠIRŮČKOVÁ*
Adresa: *Švermova 755, 538 21 SLATIŇANY*
Obor: *matematika (pro 2. stupeň škol) – anglický jazyk*

Název DP: *GEOMETRIE V UČEBNICÍCH ZŠ - PLANIMETRIE*

Název DP v angličtině: *GEOMETRY IN TEXTBOOKS AT PRIMARY SCHOOLS – PLANIMETRY*

Vedoucí práce: *prof. RNDr. Jana Přívratská, CSc. Ph.D.*
Termín odevzdání: *květen 2005*

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP lze zakoupit v Edičním středisku TU a jsou též k dispozici v UK TUL, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne *6. 6. 2004*

....
vedoucí katedry *děkan*

Převzal(a) diplomant(ka):

Datum: 3.11.2004 Podpis:

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce a konzultantem.

V Liberci dne 20. května 2005 Monika Širůčková

Poděkování:

„Děkuji všem, kteří mi pomáhali při tvorbě má diplomové práce. Vedoucí práce prof. RNDr. Janě Přívratské, CSc. Ph.D. a rovněž konzultantovi PeadDr. Jaroslavu Pernému, Ph.D. děkuji za odbornou pomoc a cenné připomínky. Dík náleží mým přátelům, kteří mě během mé práce povzbuzovali a v neposlední řadě děkuji svým rodičům za finanční a morální podporu v průběhu celého studia.“

GEOMETRIE V UČEBNICÍCH ZŠ – PLANIMETRIE

Širůčková Monika **DP–2005** **Vedoucí DP:** prof. RNDr. J. Přívratská, CSc. Ph.D.

Resumé

Diplomová práce se zabývá analýzou současného stavu učebnic matematiky pro základní školy (= ZŠ) se zaměřením na učivo planimetrie a jeho rozsah v učebnicích druhého stupně ZŠ. Práce vymezuje pojmy planimetrie, kde vychází z požadavků Vzdělávacího programu Základní škola. Uvádí přehled tří sad českých a jedné sady německých učebnic zkoumaných metodami kvantitativní a obsahové analýzy. Závěrečné shrnutí výsledků dílčích analýz umožní nahlédnout do odlišných struktur posuzovaných učebnic s důrazem na obsahovou i estetickou stránku. V příloze jsou kopie částí zkoumaných učebnic.

Geometry in Textbooks at Primary Schools - Planimetry

Summary

This Diploma thesis deals with the present state analysis of Maths-textbooks and it is focused on planimetry and it‘s extent in the textbooks at primary schools. The work defines planimetry terms where goes from the demands of the Curriculum for Primary Schools. It presents three sets of Czech and one set of German textbooks analysed by the quantitative and content analysis methods. Conclusion of the outcomes from the partial analyses helps to refer to different structures of the examined textbooks with the emphasis on the content and aesthetic value. In the appendix there are some copies of the analysed textbooks.

Geometrie in Schulbücher in der Grundschule - Planimetrie

Zusammenfassung

Die Diplomarbeit befaßt sich mit der Analyse zeitgenössisches Zustand von den Mathematik Schulbücher für Planimetrie und ihr Umfang in den

Schulbücher in den Grundschulen einstellen. Die Arbeit spezifiziert die planimetrische Begriffe, wo den Forderungen der Bildungen Pläne für die Grundschulen ausgeht. Die Arbeit erklärt drei Sätze Tschechischen und ein Satz Deutsche Schulbücher analysiert mit die Quantitative und Inhalt Analyse Methoden. Abschlußzusammenfassung Resultate von der Teilanalysen hilft nach verschiedenen Strukturen prüfunger Schulbücher mit die Akzente nach dem Inhalt und ästhetischem Wert einsehen. In der Beilage sind die Kopien von die Analyschen Schulbüchern.

Obsah:

1. SEZNAM OZNAČENÍ

$A, B, \ldots$	bod A, B, …
$a, b, \ldots$	přímka a, b, …
$\leftrightarrow AB$	přímka AB
pA	polorovina pA
$a \parallel b$	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$a \times b$	přímky a, b jsou různoběžné
$P = a \cap b$	průsečík P přímek a, b
$a = b$	přímka a je totožná s přímkou b
$A \neq p$	bod A nenáleží přímce p
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$k\ (S;\ r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
$\alpha, \beta, \ldots$	úhel $\alpha, \beta, \ldots$
t_a	těžnice vedená vrcholem A trojúhelníku
v_a	výška ke straně a trojúhelníku
s_a	střední příčka rovnoběžná s stranou a trojúhelníku
S_a	střed strany AB trojúhelníku
$\lvert AB \rvert$	velikost úsečky AB
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
Z	zobrazení
$Z: X \rightarrow X'$	bod X' je obrazem bodu X
$S\ (S)$	středová souměrnost se středem S
$O\ (o)$	osová souměrnost s osou o
$T\ (\underline{AB})$	posunutí určené orientovanou úsečkou AB
$R\ (S,\ \varphi)$	otočení se středem S a úhlem otočení φ
$H\ (S,\ k)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem k

2. ÚVOD

V současné době žijeme v moderním světe obklopeni elektronikou. Setkáváme se s ní ve všech oborech lidské činnosti a platí to také pro vzdělávání. Při výběru pomůcek výuky nebo sebevzdělávání už nejsme odkázáni pouze na tištěné učebnice, ale rozšiřující se trh nám nabízí mnoho různých audiovizuálních prostředků.

Téměř na každé dnešní základní škole se používá při výuce kromě klasických edukačních prostředků také výpočetní technika a další technické vyučovací pomůcky. Přesto setrvává tištěná učebnice v socializačním procesu žáka a působí jako hlavní komunikační prvek interakce ve škole. V rozsáhlém množství publikací nabízených nejedním nakladatelstvím je obtížné se orientovat a vybrat učebnici plně vyhovující školním potřebám. Učebnice schválené Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR vyhovují závazným kurikulárním dokumentům a nevykazují obsahové ani didaktické nedostatky, přesto není zaručeno, že splňují všechny individuální výchovné požadavky kladené na učebnice učiteli.

Začínající učitel by se měl s problematikou hodnocení učebnic seznámit, protože je to nezbytnou součástí učitelské praxe. Pouze analýzou již napsaných učebnic se dozvíme o přednostech a naopak nedostatcích dané knihy a budeme se moci poučit pro tvorbu učebnic budoucích, zvyšovat jejich úroveň a efektivitu.

Výše uvedené skutečnosti jsou motivujícími prvky k provedení podrobné analýzy různých řad učebnic nabízených na současném trhu. Na nutnost porovnání dnešních učebnic poukazuje také fakt, že v České republice neexistuje žádná organizace, která by se touto činností soustavně zabývala na vědecké úrovni a informovala by veřejnost o závěrech svých výzkumů.

Obsah učebnic publikovaných různými vydavatelstvími se liší. Některé učebnice se zaměřují pouze na specifickou část vzdělávacího kurikula, jiné více či méně přesně pokrývají celý vzdělávací program pro základní školy. Obsahové odlišnosti se nevyhýbají ani učebnicím matematiky, a proto je cílem práce analyzovat různé řady matematických učebnic po jejich formální i obsahové stránce a seznámit s výsledky matematickou veřejnost. Protože je pojem matematika velmi široký a provedení obsahové analýzy celých učebnic by bylo již nad rámec tohoto výzkumu, zaměřujeme se na oblast geometrie resp. planimetrie v rozsahu učiva základních škol.

TEORETICKÁ ČÁST

„Šťastný je národ, který má hojnost dobrých škol a dobrých knih a o vychování mládeže dobré předpisy nebo zvyky.“

J. A. Komenský

3. UČEBNICE A JEJÍ FUNKCE

K dosažení výchovně vzdělávacích cílů mohou učícímu se subjektu pomoci materiální didaktické prostředky, mezi které se řadí učební pomůcky. Kromě učebnic samotných mezi pomůcky patří literatura určená k výukovým účelům, výukové zvukové a obrazové záznamy, reálie a modely užívané při výuce aj.

Učebnice je podle Průchy **[5, s. 258]** definována jako „knižní publikace uzpůsobená pro didaktickou komunikaci svým obsahem a strukturou.“ Vymezujeme tři základní funkce učebnice :

- prezentace učiva
- řízení učení a vyučování
- funkce organizační

Tato klasifikace udává analytický aparát hodnocení učebnic.

4. PLANIMETRIE

Matematika je věda klasifikovaná do mnoha různých oborů. Jedním z těchto oborů je geometrie zabývající se vlastnostmi geometrických útvarů. Geometrie bývá členěna na dva základní podobory: stereometrii a planimetrii. Stereometrie se zaměřuje na vlastnosti geometrických útvarů, jejichž všechny části nenáleží jedné rovině. Naopak planimetrie zkoumá vlastnosti takových útvarů, jejichž všechny části se nalézají v jedné rovině.

Jelikož se tato práce zaměřuje na publikace určené pro základní školy, zúžíme planimetrii na úroveň odpovídající požadavkům Vzdělávacího programu Základní škola **[9]** vydané MŠMT ČR a platné od 1. 9. 1996.

4.1 Základní pojmy planimetrie

Základní prvky planimetrie jsou bod, přímka a rovina. Tyto pojmy se nedefinují, pouze se popisují a chápeme je intuitivně.

Polohové vlastnosti bodů a přímek

- Dvěma různými body A, B prochází právě jedna přímka p, $p = \leftrightarrow AB$.
- Dvě navzájem různé přímky a, b jsou rovnoběžné, $a \parallel b$, pokud nemají žádný společný bod.
- Dvě navzájem různé přímky a, b jsou různoběžné, $a \times b$, pokud mají společný právě jeden bod. Průsečík $P = a \cap b$.
- Daným bodem $A \neq p$ lze k daná přímce vést právě jednu rovnoběžku q.
- Daným bodem A lze k dané přímce p vést právě jednu přímku q, která je kolmá k přímce p, $p \perp q$.

- Pro tři navzájem různé přímky a, b, c rozlišujeme čtyři vzájemné polohy:
  - všechny tři přímky jsou rovnoběžné, $a \parallel b \parallel c$,
  - všechny tři přímky jsou navzájem různoběžné, přičemž existuje jejich společný průsečík, $P = a \cap b \cap c$,
  - všechny tři přímky jsou navzájem různoběžné, přičemž neexistuje jejich společný průsečík,
  - dvě přímky jsou rovnoběžné, $a \parallel b$, třetí přímka (příčka) je s nimi různoběžná, $a \times c$, $b \times c$.
- Vzdálenost bodu od přímky p je vzdálenost bodů A, Q; přičemž Q označuje patu kolmice spuštěné z bodu A na přímku p. (Vzdálenost bodu od přímky je vždy číslo nezáporné.)
- Věty o rovnoběžkách a kolmicích
  - Jestliže pro přímky a, b, c platí $a \parallel b$, $b \parallel c$, pak $a \parallel c$.
  - Je-li $a \perp b$ a $a \perp c$, pak $a \perp c$.
  - Je-li $a \perp b$ a $a \perp c$, pak $b \perp c$.
- Věty o rovnoběžkách proťatých příčkou
  - Souhlasné i střídavé úhly, určené rovnoběžnými přímkami a, b a libovolnou jejich příčkou c, jsou shodné.
  - Součet přilehlých úhlů, určených rovnoběžnými přímkami a, b a libovolnou jejich příčkou c, je úhel přímý.

4.2 Kružnice

Je dán bod S a kladné číslo r. Kružnice k (S; r) je množina všech bodů roviny, které mají od bodu S vzdálenost r.

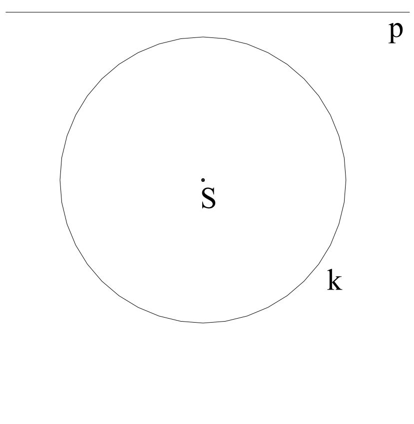
Bod S se nazývá střed kružnice a r je poloměr kružnice.

- Vnitřek kružnice *k (S; r)* nazýváme množinu všech bodů v rovině, pro které platí $AX < r$.
- Vnějšek kružnice *k (S; r)* nazýváme množinu všech bodů v rovině, pro které platí $AX > r$.
- Úsečku *AB*, jejíž krajní body *A*, *B* leží na kružnici *k,* se nazývá tětivou kružnice *k*. Tětiva, která prochází středem kružnice se nazývá průměr kružnice.

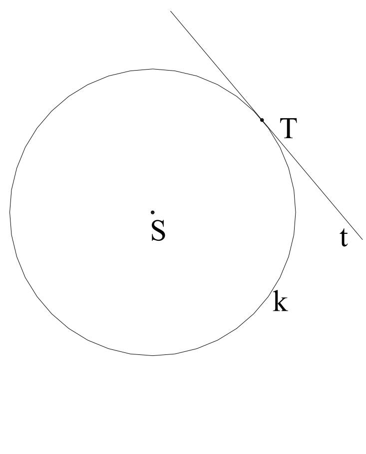
4.2.1 Vzájemná poloha přímky a kružnice

- Všechny body dané přímky *p* leží vně kružnice *k*, tzn., že přímka *p* nemá s kružnicí *k* žádný společný bod; takovou přímku nazveme vnější přímkou kružnice *k.* (viz. Obr. č. 1)
- Jeden bod T dané přímky *p* je bodem kružnice *k,* ostatní body přímky *p* jsou vnějšími body kružnice *k*; takovou přímku nazveme tečnou (viz. Obr. č. 2) kružnice *k* a bod *T* jejím bodem dotyku.

Obr. č. 1: Vnější přímka.

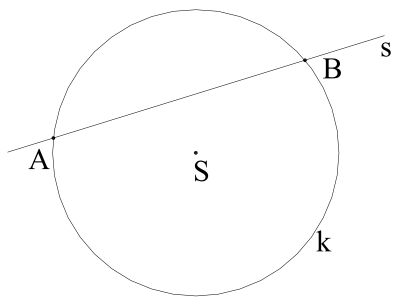


Obr. č. 2: Tečna.



- Dva různé body *A, B* dané přímky *p* jsou body kružnice *k,* body vnitřku úsečky *AB* náleží vnitřku příslušné kružnice *k,* ostatní body přímky *p* náleží jejímu vnějšku. Takovou přímku nazveme sečnou (viz. Obr. č. 3) kružnice *k*; body *A, B* jsou tzv. průsečíky.

Obr. č. 3: Sečna.



- Pata *P* kolmice vedené ze středu kružnice na sečnu *AB* je středem tětivy *AB*.
- Tečna kružnice je kolmá k poloměru, který spojuje bod dotyku *T* se středem *S* kružnice *k (S; r)*.

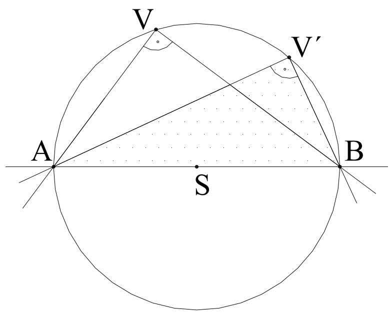
4.2.2 Středové a obvodové úhly

Úhel, jehož vrcholem je střed S kružnice k (S; r) a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k se nazývá středový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

Úhel, vrchol V je bodem kružnice k (S; r) a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k (V ≠ A, V ≠ B), se nazývá obvodový úhel příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží.

- Ke každému oblouku AB existuje jediný středový úhel α a nekonečně mnoho obvodových úhlů β.
- Velikost středového úhlu α je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu β příslušného k témuž oblouku.
- Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku AB jsou shodné.
- Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ostrý.
- Obvodový úhel příslušný k většímu oblouku je tupý.
- Thaletova věta: Všechny úhly nad průměrem kružnice $k\ (S;\ r)$ jsou pravé. (viz. Obr. č. 4)

Obr. č. 4: Thaletova věta.



4.2.3 Vzájemné polohy dvou kružnic

- Všechny body kružnice k_2 náleží vnitřku k_1; kružnice nemají společné body; říkáme, že kružnice k_2 leží uvnitř kružnice k_1.
- Všechny body kružnice k_2 s výjimkou bodu T náleží vnitřku k_1; bod A je jediným společným bodem obou kružnic, které v něm mají tutéž tečnu t, a nazývá se bodem dotyky obou kružnic. V tomto případě říkáme, že se kružnice k_2 dotýká zevnitř kružnice k_1.

- Kružnice k_1 obsahuje body, které náleží kružnici k_2, jejímu vnitřku i vnějšku; obdobně je tomu u kružnice k_2. Obě kružnice mají společné dva různé body A, B, zvané průsečíky. V tomto případě říkáme, že obě kružnice se protínají.
- Všechny body kružnice k_2 s výjimkou bodu A leží vně kružnice k_1 (obdobně platí pro kružnici k_1); bod T je jediným společným bodem obou kružnic, které v něm mají tutéž tečnu t, a nazývá se bodem dotyky obou kružnic. V tomto případě říkáme, že se kružnice k_2 dotýká vně kružnice k_1.
- Každý bod kružnice k_2 (k_1) náleží vnějšku kružnice k_1 (k_2); kružnice nemají společný bod. Říkáme, že k_2 leží vně kružnice k_1.
- Dvě kružnice o společném středu nazýváme soustředné kružnice.
- Úsečku určenou středy dvou nesoustředných kružnic resp. velikost této úsečky nazýváme střednou obou kružnic.

4.3 Trojúhelník

Nechť jsou body A, B, C nekolineární, pak průnik polorovin ABC, BCA a CAB nazýváme trojúhelník ABC.

Body *A, B, C* se nazývají vrcholy, úsečky *AB, BC, CA* strany a úhly *ABC, BCA, CAB* vnitřní úhly trojúhelníka.

4.3.1 Základní vlastnosti trojúhelníku

- Součet vnitřních úhlů je úhel přímý.
  $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

- Vnější úhel je roven součtu vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech.

  $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$, $\gamma' = \alpha + \beta$

- Součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.

  $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$

- Rozdíl každých dvou stran trojúhelníku je menší než strana třetí.

  $|a - b| < c$, $|a - c| < b$, $|b - c| < a$

- Každá střední příčka trojúhelníku je rovnoběžná s tou stranou trojúhelníku, jejíž střed nespojuje.

  $s_c = S_aS_b \parallel AB$, $s_b = S_aS_c \parallel AC$, $s_a = S_bS_c \parallel BC$

- Délka střední příčky je rovna polovině délky strany, s kterou je rovnoběžná.

  $s_a = {}^1/_2\ |BC|$, $s_b = {}^1/_2\ |AC|$, $s_c = {}^1/_2\ |AB|$

- Poměr velikostí výšek v trojúhelníku je stejný jako poměr převrácených hodnot velikostí stran.

  $v_a : v_b : v_c = {}^1/_a : {}^1/_b : {}^1/_c$

- Těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě T, tzv. těžišti.

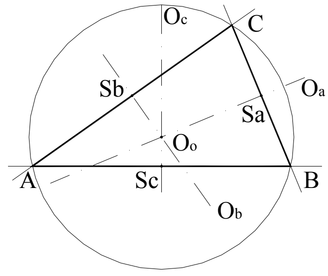
  $T = t_a \cap t_b \cap t_c$

- Vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku je ${}^2/_3$ délky příslušné těžnice.

  $|AT| : |TS_a| = |BT| : |TS_b| = |CT| : |TS_c| = 2 : 1$

- Osy stran trojúhelníku se protínají v jediném bodě O_o, a to ve středu kružnice trojúhelníku opsané. (viz. Obr. č. 5)

  $O_o = o_a \cap o_b \cap o_c$

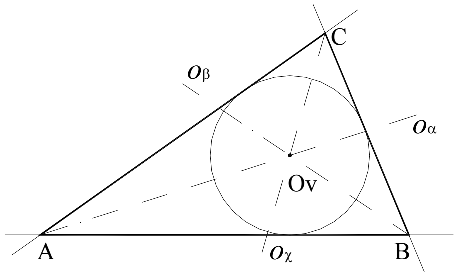


Obr. č. 5: Kružnice opsaná.

- Osy vnitřních úhlů trojúhelníka se protínají v jediném bodě O_v, a to ve středu kružnice trojúhelníku vepsané. (viz. Obr. č. 6)

  $O_v = o_\alpha \cap o_\beta \cap o_\gamma$

Obr. č. 6: Kružnice vepsaná.



4.3.2 Shodnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky △ ABC a △ A´B´C´ se nazývají <u>*shodné*</u> *trojúhelníky, jestliže je lze přemístit tak, že se úplně kryjí, tj. mají-li shodné všechny strany i vnitřní úhly.*

Věty o shodnosti trojúhelníků:

- Věta sss: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách.
- Věta sus: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.
- Věta usu: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a obou úhlech k ní přilehlých.
- Věta Ssu: Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dnou stranách a úhlu ležícím proti větší z nich.

4.3.3 Podobnost trojúhelníků

Dva trojúhelníky $\triangle\ ABC$ *a* $\triangle\ A'B'C'$ *se nazývají* <u>*podobné*</u> *trojúhelníky, jestliže jejich odpovídající si strany jsou úměrné, tj. existuje-li takové kladné číslo k, že platí:* $|A'B'| = k.|AB|$, $|B'C'| = k.|BC|$, $|A'C'| = k.|AC|$.

Číslo *k* nazýváme poměr podobnosti.

Je-li $k > 1$, podobnost představuje zvětšení,

Je-li $k < 1$, podobnost představuje zmenšení,

Je-li $k = 1$, podobnost přechází ve shodnost.

Věty o podobnosti trojúhelníků:

- Věta uu: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.
- Věta sus: Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu a rovnají-li se poměry délek stran ležících na jeho ramenech.
- Věta Ssu: Dva trojúhelníky jsou podobné, rovnají-li se poměry délek dvou stran a jsou-li shodné úhly ležící proti větší z nich.

4.3.4 Euklidovy věty

<u>Euklidova věta o výšce</u>: Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku, jehož strany mají velikost obou úseků na přeponě.

$v^2 = c_a \, . \, c_b$

Euklidova věta o odvěsně: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku jehož strany mají velikost přepony a úseku k uvažované odvěsně přilehlého.

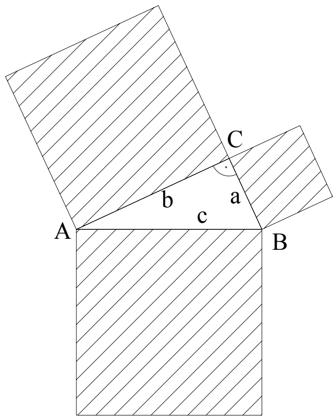
$a^2 = c \cdot c_a,\ b^2 = c \cdot c_b$

4.3.5 Pythagorova věta

Pythagorova věta: Součet obsahů čtverců nad oběma odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu čtverce sestrojeného nad jeho přeponou. (viz. Obr. č. 7)

$c^2 = a^2 + b^2$

Obr. č. 7: Pythagorova věta



4.4 Čtyřúhelníky

Sjednocením jednoduché uzavřené lomené čáry $A_0A_1\ldots A_n$ ($A_0 = A_n$, $n \geq 3$) s její vnitřní oblastí se nazývá mnohoúhelník $A_0A_1\ldots A_n$ (n-úhelník).

Budeme se zabývat pouze konvexními čtyřúhelníky (viz. Obr. č. 8), tj. takovými, které leží vždy v jedné z polorovin určených kteroukoli stranou.

Nechť jsou dány čtyři body A, B, C, D, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Konvexní čtyřúhelník je průnik polorovin ABC, BCD, CAD, DAB.

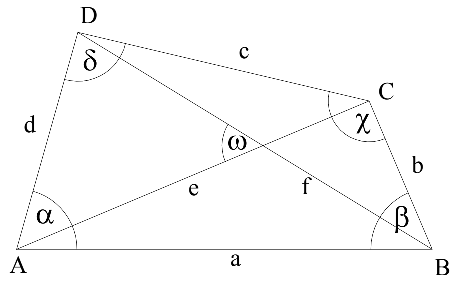
Body *A, B, C, D* … se nazývají vrcholy,

Úsečky *AB, BC, CD, AD* … strany,

Úsečky *AC, BD* … úhlopříčky,

Úhly *DAB, ABC, BCD, ADC* … vnitřní úhly.

Obr. č. 8: Čtyřúhelník.



4.4.1 Různoběžníky

Různoběžníky – čtyřúhelníky, jejichž žádné dvě strany nejsou rovnoběžné, speciálním případem je deltoid – čtyřúhelník jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé a jedna z nich (hlavní) *e* prochází středem druhé (vedlejší) *f*.

4.4.2 Lichoběžníky

Lichoběžníky – čtyřúhelníky, jejichž dvě strany jsou rovnoběžné a zbývající strany rovnoběžné nejsou.

Strany *AB, CD* … se nazývají základny,

Strany *BC, AD* … ramena,

s … střední příčka, $s \parallel AB \parallel CD$, $|s| = \dfrac{|AB| + |CD|}{2}$

4.4.3 Rovnoběžníky

Rovnoběžníky - čtyřúhelníky, jejichž obě dvojice protilehlých stran jsou rovnoběžné.

Rovnoběžníky lze dále dělit - podle úhlů

- *Pravoúhlé*: obdélník, čtverec.
- *Kosoúhlé*: kosodélník, kosočtverec.

- podle délek stran

- *Rovnostranné*: čtverec, kosočtverec.
- *Různostranné*: obdélník, kosodélník.

Vlastnosti rovnoběžníků:

- Protější strany rovnoběžníku jsou shodné.
- Protější vnitřní úhly rovnoběžníku jsou shodné.
- Úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí.
- Má-li rovnoběžník dva sousední úhly pravé, jsou shodné všechny úhly a jsou pravé.
- Má-li rovnoběžník shodné dvě sousední strany, jsou všechny jeho strany shodné.
- Úhlopříčky pravoúhlého rovnoběžníku jsou shodné.
- Úhlopříčky rovnostranného rovnoběžníku půlí vnitřní úhly a jsou na sebe kolmé.
- Pravoúhlému čtyřúhelníku lze opsat kružnici *k (E; e/2)*. Jde o speciální typ *tětivového čtyřúhelníku*.
- Rovnostrannému čtyřúhelníku lze vepsat kružnici *k (E; r)*. Jde o speciální typ *tečnového čtyřúhelníku*.

4.5 Množiny bodů dané vlastnosti

Množinou bodů, které mají danou vlastnost, rozumíme množinu bodů geometrického útvaru U, jehož body splňují tyto dva požadavky:

a) Každý bod útvaru U má předepsanou vlastnost (~ každý bod, který nemá předepsanou vlastnost, není bodem útvaru U).

b) Každý bod, který má předepsanou vlastnost, je bodem útvaru U (~žádný bod, který není bodem útvaru U, nemá předepsanou vlastnost).

Nejdůležitější množiny bodů dané vlastnosti potřebné pro řešení konstrukčních úloh:

- Množina všech bodů, které mají od daného bodu *S* danou vzdálenost *v* je kružnice *k (S; v)*.
- Množina všech bodů, které mají od daných bodů *A,B* $(A \neq B)$ stejnou vzdálenost je osa *o* úsečky AB.
- Množina všech bodů, které mají od dané přímky *p* danou vzdálenost *v* je dvojice přímek *a, a′* Rovnoběžných s přímkou *p*, ležících v opačných polorovinách s hraniční přímkou *p*.
- Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou daných rovnoběžných přímek *a,b* $(a \neq b)$, je osa pásu *(a, b)*.
- Množina všech středů kružnic s poloměrem *r*, které se dotýkají dané přímky *p*, je dvojice přímek *a, a′* rovnoběžných s přímkou *p*, ležících v opačných polorovinách s hraniční přímkou *p* ve vzdálenosti *r*.
- Množina všech bodů konvexního úhlu *AVB*, které mají stejnou vzdálenost od jeho ramen *VA, VB* je osa *o* tohoto úhlu.
- Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek *a,b*, jsou osy $o_1 \perp o_2$ úhlů sevřených přímkami *a,b*.

- Množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané přímky t v bodě $T \in t$, je <u>přímka p kolmá k přímce t</u>, $p \perp t$, vedená bodem T s výjimkou bodu T.
- Množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k\ (S;\ r)$ v bodě T, $T \in k$, je <u>přímka ST</u> s výjimkou bodu T.
- Množina vrcholů všech pravých úhlů, jejichž ramena procházejí dvěma danými body $A,B\ (A \neq B)$, tj. množina všech bodů, z nichž vidíme danou úsečku AB pod pravým úhlem, je <u>kružnice s průměrem AB (Thaletova kružnice)</u> s výjimkou bodů A, B.
- Množina vrcholů všech úhlů velikosti α, jejichž ramena procházejí dvěma danými body $A,B\ (A \neq B)$, tj. množina všech bodů, z nichž vidíme danou úsečku AB pod úhlem α, jsou dva shodné <u>kružnicové oblouky k_1, k_2</u> s krajními body A, B s výjimkou bodů A, B.
- Množina středů všech kružnic, které mají daný poloměr r a dotýkají se dané kružnice $k_0\ (S_0,\ r_0)$ je <u>dvojice soustředných kružnic $k_1\ (S,\ r + r_0)$</u>, (kružnice mají vnější dotyk) a <u>$k_2\ (S,\ |r - r_0|)$</u>, (kružnice mají vnitřní dotyk).

4.6 Shodná zobrazení

<u>Zobrazení</u> Z je předpis, který každému bodu X přiřazuje právě jeden bod X′. Bod X se nazývá <u>vzor</u>, bod X′ je jeho <u>obraz</u>. Zapisujeme $Z\colon X \rightarrow X'$ nebo $X' = Z\,(X)$.

Obraz U' geometrického útvaru U je množina obrazů všech bodů útvaru U.

Je-li $U' \equiv U$, říkáme, že útvar U je <u>samodružný.</u>

Zobrazení je <u>shodné</u> (shodnost), jestliže obrazem každé úsečky XY je úsečka X′Y′ shodná s úsečkou XY (mají stejnou délku).

Vlastnosti shodného zobrazení:

- Obrazem přímky $a = AB$ je přímka $a' = A'B'$.
- Obrazem rovnoběžných přímek $a \parallel b$ jsou rovnoběžné přímky $a' \parallel b'$.
- Obrazem polopřímky AB je polopřímka $A'B'$.
- Obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.
- Obrazem poloroviny pA je polorovina $p'A'$.
- Obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
- Obrazem úhlu AVB je úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB.
- Orientace úhlů AVB a $A'V'B'$ je v dané zobrazení buď stejná pro každý orientovaný úhel a jeho obraz, nebo opačná. Podle toho dělíme shodná zobrazení na *přímou* nebo *nepřímou* shodnost.
- Obrazem kružnice $k\ (S;\ r)$ je kružnice $k'\ (S';\ r' = r)$.
- Každé shodné zobrazení je prosté.
- Základní shodná zobrazení v rovině jsou :
  - *Identické zobrazení E*
  - *Osová souměrnost O*
  - *Otočení (rotace) R*
  - *Středová souměrnost S*
  - *Posunutí (translace) T*

4.6.1 Identické zobrazení

Zobrazení E, které každému bodu X přiřadí bod $X' = X$ nazveme <u>identickým zobrazením</u> (identitou).

Všechny body i geometrické útvary jsou v identickém zobrazení samodružné.

4.6.2 Osová souměrnost

Je dána přímka o. <u>Osovou souměrností</u> s osou o nazveme zobrazení O (o), které přiřazuje:

a) každému bodu $X \in o$ bod $X' = X$,

b) každému bodu $Y \notin o$ bod Y' tak, že přímka YY' je kolmá k ose o a střed úsečky YY' leží na ose o.

Geometrický útvar *U*, který je v osové souměrnosti *O (o)* invariantní, tj. $U' = U$, nazveme osově souměrný podle osy o.

Vlastnosti *O (o)*:

- Osová souměrnost je nepřímá shodnost.
- Množina všech samodružných bodů v osové souměrnosti je osa $o = o'$, která tvoří jedinou samodružnou přímku.
- Invariantní jsou všechny přímky kolmé k ose *o*.
- Obrazem přímky *p* rovnoběžné s osou, $p \parallel o$, je přímka *p′ rovnoběžná s osou*, $p' \parallel o$.
- Obrazem přímky *q*, která není rovnoběžná s osou a není k ní kolmá, je přímka q', která se s přímkou *q* protíná na ose *o*, $Q = q \cap q' = Q'$.

4.6.3 Otočení

Je dán orientovaný úhel $\underline{\varphi}$*, pro jehož základní velikost platí* $\varphi \neq 0°$*, a bod S.* <u>*Otočením*</u> *(rotací) je zobrazení R (S,* $\underline{\varphi}$*), které přiřazuje:*

a) *bodu S bod* $S' = S$,

b) *každému bodu* $X \neq S$ *bod* X' *tak, že* $|X'S'| = |XS|$ *a orientovaný úhel* $XSX' \cong \underline{\varphi}$.

Bod *S* se nazývá střed otočení, orientovaný úhel $\underline{\varphi}$ je úhel otočení.

Vlastnosti *R (S,* $\underline{\varphi}$*)*:

- Otočení je přímá shodnost.
- Otočení má jediný samodružný bod. Je jím střed otočení *S*.
- Otočení o úhel $\varphi \neq 180°$ nemá invariantní přímky.
- Otočení o úhel $\varphi \neq 180°$ každé přímce *p* přiřadí přímku *p′* s danou přímkou různoběžnou.

4.6.4 Středová souměrnost

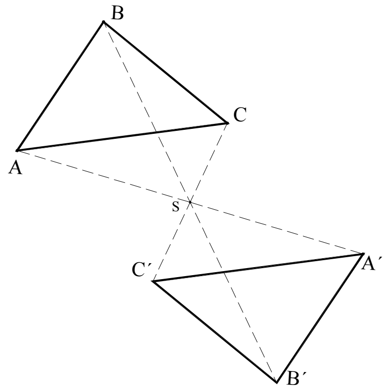
Je dá bod S. <u>Středovou souměrností</u> nazveme zobrazení, *S (S)*, které přiřazuje:

a) *bodu S bod* $S' = S$,

b) *každému bodu* $X \neq S$ *bod* X' *tak, že bod S je středem úsečky* XX'*.*

Bod *S* nazýváme středem souměrnosti. (viz. Obr. č. 9)

Obr. č. 9: Středová souměrnost.



Vlastnosti *S (S)*:

- Středová souměrnost je otočení o úhel 180°.
- Všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti jsou invariantní.
- Obrazem přímky p, která prochází středem souměrnosti S je přímka $p \parallel p'$.

4.6.5 Posunutí

Je dána orientovaná úsečka $\underline{AB}$, $A \neq B$. *<u>Posunutím</u> (translací) je zobrazení* $T(\underline{AB})$, *které každému bodu* X *přiřadí bod* X' *tak, že orientované úsečky* $\underline{XX'}$ *a* $\underline{AB}$ *jsou rovnoběžné, mají stejnou délku a jsou souhlasně orientovány.*

Orientovanou úsečkou $\underline{AB}$ je určen vektor posunutí $\underline{t} = \underline{AB}$.

Vlastnosti $T(\underline{t})$:

- Posunutí je přímá shodnost.
- Posunutí nemá žádné samodružné body.

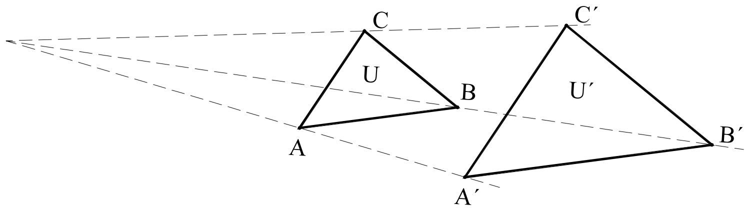
- Obrazem přímky *p*, která není rovnoběžná se směrem posunutí je přímka p' rovnoběžná s přímkou p.
- Přímky, které jsou rovnoběžné se směrem posunutí jsou invariantní.

4.7 Podobná zobrazení

Geometrické zobrazení se nazývá <u>*podobným zobrazením*</u> *(podobností) s koeficientem* $\kappa > 0$*, jestliže každou úsečku AB zobrazí na úsečku* $A'B'$*, přičemž pro velikosti těchto úseček platí:* $|A'B'| = \kappa\ |AB|$. *Číslo* κ *se nazývá koeficientem podobnosti.*

Dva geometrické útvary *U, U′* jsou podobné, jestliže existuje podobné zobrazení, které zobrazí útvar *U* na útvar *U′*. (viz. Obr. č. 10)

Obr. č. 10: Podobné zobrazení.



Vlastnosti podobného zobrazení:

- Obrazem přímky $a = AB$ je přímka $a' = A'B'$.
- Obrazem rovnoběžných přímek $a \parallel b$ jsou rovnoběžné přímky $a' \parallel b'$.
- Obrazem polopřímky *AB* je polopřímka $A'B'$.
- Obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.
- Obrazem poloroviny *pA* je polorovina $p'A'$.
- Obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.

- Obrazem úhlu AVB je úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB.
- Orientace úhlů AVB a $A'V'B'$ je v dané zobrazení buď stejná pro každý orientovaný úhel a jeho obraz, nebo opačná. Podle toho dělíme podobná zobrazení na *přímou* nebo *nepřímou* podobnost.
- Obrazem kružnice $k\ (S;\ r)$ je kružnice $k'(S';\ r' = r)$.
- Každé podobné zobrazení je prosté.
- Podobnost s koeficientem $\kappa = 1$ je shodnost.
- Základní podobné zobrazení v rovině je stejnolehlost H.

4.7.1 Stejnolehlost

Je dán bod S a reálné číslo k ($k \neq 0$, $k \neq 1$). <u>*Stejnolehlostí*</u> *(homotetií) H (S, k) nazveme zobrazení,které přiřadí:*

a) bodu S bod $S' = S$,

b) každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že pro velikost úseček platí $|SX'| = |k|.|SX|$, přičemž bod X' leží na polopřímce SX, je-li $k > 0$, nebo na opačné polopřímce k SX, je-li $k < 0$.

Bod *S nazýváme středem stejnolehlosti, číslo k* jejím koeficientem.

Vlastnosti *H (S, k)*:

- Stejnolehlost má jediný samodružný bod. Je jím střed stejnolehlosti *S*.
- Všechny přímky procházející středem stejnolehlosti *S* jsou invariantní.
- Stejnolehlost je podobné zobrazení s koeficientem podobnosti $\kappa = |k|$.
- Stejnolehlost s koeficientem $k = -1$ je středová souměrnost.
- Obrazem kružnice $k\ (S;\ r)$ ve stejnolehlosti je kružnice $k'(S';\ r' = |k|\ r)$.

4.8 Konstrukční úlohy

Jedná se o úlohy, v nichž se má z daných prvků sestrojit geometrický útvar předepsaných vlastností.

Základní euklidovské konstrukce:

- Přenesení dané úsečky AB na danou polopřímku XY.
- Přenesení daného dutého úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny.
- Sestrojení osy úsečky.
- Sestrojení osy úhlu.
- Daným bodem vést přímku kolmou k dané přímce.
- Daným bodem vést rovnoběžku s danou přímkou.

Postup při řešení konstrukčních úloh:

1) **Rozbor** – předpokládáme, že úloha je řešitelná. Načrtneme takový geometrický útvar, který vyhovuje podmínkám kladených na řešení úlohy. Do náčrtu zakreslíme dané prvky a hledáme souvislosti mezi těmito prvky a hledaným útvarem.
2) **Konstrukce –** na základě rozboru stanovíme posloupnost základních euklidovských konstrukcí, které vedou k sestrojení hledaného geometrického útvaru. Podle daného postupu útvar sestrojíme.
3) **Zkouška –** ověříme správnost konstrukce, tj. zda sestrojený útvar má požadované vlastnosti.
4) **Diskuse –** jde-li o úlohu s parametry, určíme podmínky, za kterých lze řešení provést a kolika způsoby.

5. PLANIMETRIE NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Planimetrie je nepostradatelnou součástí matematiky a prostupuje celým učivem druhého stupně základní školy. Nezastupitelná role planimetrie je dána její charakteristickou názorností a schopností pozitivně ovlivnit rozvoj lidské představivosti. Názornost užitá zejména v konstrukčních úlohách odlišuje geometrii od algebraické části matematiky, ve které převládá abstraktní pojetí. Konstrukční úlohy vycházejí z kreslení, činnosti pro děti zcela přirozené, a značně se podílejí na upevňování a prohloubení porozumění probírané teorie, napomáhají při osvojení analýzy a syntézy jako metod poznání a rozvíjejí algoritmické myšlení žáků. Alternativní formy řešení konstrukčních úloh přispívají k postupnému objevování a osvojování dokonalejších metod řešení. Vlastní praktické provedení konstrukcí procvičuje dovednost rýsovat, cvičí jemnou motoriky rukou a v neposlední řadě se podílí na rozvoji estetického cítění (volně dle Květoně **[1, s. 282 - 287]**).

Planimetrické úlohy nabízející kreativní způsoby řešení je možné snadno využít při problémovém výkladu učiva. Nesmíme však zapomínat ani na deduktivní metodu výkladu. Ale vyvozující způsob by neměl být v případě geometrie převažující, protože nerozvíjí představivost a schopnosti tvořivého myšlení takovou měrou jakou působí problémové vyučování.

I přes znalost výše zmíněných výhod je geometrie stále opomíjenou disciplínou. Mnozí učitelé jí nevěnují dostatečnou pozornost a počet hodin věnovaných geometrii minimalizují ve prospěch jiných tématických celků. Tento vztah učitele ke geometrii pochází již z jeho vlastní školní docházky, kdy byl ovlivněn svým učitelem matematiky. Avšak osobnost učitele není podle Květoně jedinou příčinou malé obliby geometrie. Musíme jmenovat také nevhodný výběr a organizaci učiva a nepřiměřené metody. **[1, s.234]** V průběhu 90. let proběhly četné snahy o reformy, ale přesto se postavení geometrie stále nemění, což nás nutí zamýšlet se nad otázkou zajištění adekvátní pozornosti všem tématům matematiky předepsaných osnovami a především vyzdvihnout postavení geometrie.

Zmíněná situace na základních školách udává zaměření této práce na prezentaci planimetrie v různých učebnicích druhého stupně ZŠ. Pro jasnou představu o náplni planimetrie na základní škole uvedeme její obsah v jednotlivých ročnících podle Vzdělávacího programu Základní škola **[9]** platného od 1. 9. 1996.

5.1 6. ročník

Úhel a jeho velikost

- Úhel, osa úhlu; přenášení úhlu, konstrukce osy úhlu (Čl. 4.5).
- Velikost úhlu, jeho měření a rýsování úhlu dané velikosti; úhloměr, jeho užití; jednotky (stupeň, minuta) velikosti úhlů, převody a užití jednotek velikosti úhlů, odhady velikosti úhlu.
- Přímý, ostrý, pravý, tupý úhel; vedlejší a vrcholové úhly; rozeznávání a rýsování uvedených druhů úhlů; určování velikostí vedlejších a vrcholových úhlů.
- Sčítání a odčítání, násobení a dělení úhlů a jejich velikostí včetně grafického řešení, grafické dělení a násobení dvěma.

Osová souměrnost (§ 4.6.2)

- Shodnost geometrických útvarů; použití průsvitky.

- Osová souměrnost, osa souměrnosti a její určení osově souměrného obrazce; konstrukce obrazu v osové souměrnosti.

Trojúhelník (Čl. 4.3)

- Vnitřní a vnější úhly trojúhelníka, určování jejich velikostí.
- Rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník; třídění, popis.
- Výšky a těžnice trojúhelníka, těžiště.
- Kružnice opsaná a vepsaná.
- Trojúhelníková nerovnost, konstrukce trojúhelníka ze tří stran.

5.2 7. ročník

Shodnost, středová souměrnost (§ 4.6.4)

- Shodnost geometrických útvarů (průsvitka); shodnost trojúhelníků (věty o shodnosti), konstrukce trojúhelníků podle vět sss, sus, usu (§ 4.3.2).
- Shodná zobrazení, středová souměrnost, konstrukce obrazu ve středové souměrnosti.
- Samodružný bod; užití vlastností středově souměrných obrazců.
- Útvar středově souměrný, řešení úloh z praxe.

Čtyřúhelníky (Čl. 4.4)

- Rovnoběžník: různé druhy a jejich vlastnosti, výšky a úhlopříčky, obvod a obsah.
- Obdélník, kosodélník, čtverec, kosočtverec, trojúhelník, lichoběžník; jejich vlastnosti, konstrukce, výpočty obvodů a obsahů, řešení slovních úloh.

5.3 8. ročník

Pythagorova věta (§ 4.3.5)

- Geometrický význam Pythagorovy věty.

Kruh, kružnice (Čl. 4.2)

- Kruh, kružnice; jednotlivé konstrukce.
- Vzájemná poloha kružnice a přímky, jejich konstrukce, tětiva, konstrukce tečny ke kružnici daným vnějším bodem.
- Vzájemná poloha dvou kružnic, konstrukce, vnější a vnitřní dotyk dvou kružnic, středná.
- Thaletova kružnice (§ 4.2.2).
- Výpočty obsahu kruhu a délky kružnice, slovní úlohy.

Konstrukční úlohy

- Základní pravidla přesného rýsování; rozbor, zápis a provedení konstrukce.
- Množiny bodů dané vlastnosti, jejich sestrojování (Čl. 4.5).
- Základní konstrukce: osa úsečky a úhlu, rovnoběžky, soustředné kružnice, tečna ke kružnici.
- Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků; užití vět sss, sus, usu.

5.4 9. ročník

Podobnost (Čl. 4.7)

- Podobnost, poměr podobnosti; určování podobných útvarů v rovině, dělení úsečky v daném poměru, zvětšování a zmenšování rovinných útvarů v daném poměru.

- Věty o podobnosti trojúhelníků a jejich užití (§ 4.3.3).
- Technické výkresy, plány, mapy; výpočty délky cest podle map, zhotovování modelů.

Základy rýsování (alternativní prvek)

- Druhy čar, technické písmo, kótování, kóty ve strojírenství a stavebnictví.
- Pravoúhlé promítání, sestrojování sdružených průmětů hranolu a válce.

Skutečností je, že planimetrie zaujímá v matematice nezastupitelné místo, a proto ji nelze z této vědy vyloučit. Vzdělávací program Základní škola uvádí náplň učiva planimetrie, která je závazná pro školy vyučující podle zmíněného vzdělávacího programu. Ovšem jak již bylo řečeno, pohled mnohých dnešních učitelů na geometrii zapříčiňuje upadající znalosti žáků v planimetrické části matematiky. Nabízí se otázka, zda také autoři učebnic podlehly tomuto trendu, přizpůsobují se učitelům a minimalizují planimetrii ve svých učebnicích nebo naopak důsledným dodržováním osnov nutí učitele k objektivním postojům k veškerému učivu. Odpovědět na uvedené otázky si klade za cíl tato práce.

PRAKTICKÁ ČÁST

„Neexistuje taková bezcenná kniha, v níž by nebylo napsáno alespoň něco dobrého.“

Johnson Samuel

6. HODNOCENÍ UČEBNIC

V současné době se často hovoří o špatné situaci ve školství. Různí odborníci aplikují stále nové reformy, ale veřejnost není uspokojena tímto vývojem a nadále požaduje zlepšení českého systému vzdělávání. Učebnice jsou nezbytnou součástí dnešního vzdělávacího procesu. Abychom mohli zlepšovat jejich úroveň, hodnotíme současný stav a na základě těchto výzkumů můžeme rozhodnout o přednostech i nedostatcích zkoumaných učebnic. Shromážděné poznatky lze využít při tvorbě nových učebnic, které budou svými vlastnostmi vyhovovat potřebám a nárokům žáků, učitelů, rodičů a celé veřejnosti.

6.1 Metody hodnocení

Různé účely prováděných výzkumů učebnic vyžadují odlišná hlediska hodnocení. Existují stovky metod, kterými lze učebnice analyzovat. Nejprve je nutné ujasnit si předmět výzkumu a poté zvolit vhodnou analyzující metodu.

Závěry výzkumu prezentované v této práci byly vyvozeny na základě použití následujících metod:

- Metoda kvantitativní

Vzhledem k požadovaným cílům byla aplikována analýza **didaktické vybavenosti** učebnic. Základem této metody bylo využití instrukcí od prof. PhDr. Jana Průchy, DrSc. **[4, s. 141].** Původní strukturace hodnocených komponentů byla však částečně modifikována a doplněna o pětistupňovou škálu určující míru zastoupení složek ve zkoumané učebnici. Analyzované řady učebnic vznikaly vždy jako celek, proto se jejich jednotlivé učebnice od sebe z pohledu didaktické vybavenosti nijak neliší a je možné aplikovat tento způsob výzkumu na celou řadu najednou. Následující metody byly použity již na jednotlivé knihy.

Dalšímu analyzování byly podrobeny vlastnosti učebnice, přesněji řečeno **komunikační parametry**, tzn. rozsah verbální (textové) a neverbální (grafické) složky učebnice.

Následujícím krokem bylo zkoumání **textu**, tzn. rozsah učebnice měřený počtem stran a rozsah verbální složky měřený počtem slov. Výsledky zmíněných metod byly použity k určení počtu slov odpovídající jedné vyučovací hodině (započítáváme-li, podle Vzdělávacího programu ZŠ, 4 vyučovací hodiny matematiky týdně a 33 týdnů v jednom školním roce).

- Metoda obsahové analýzy

Zaměření výzkumu na planimetrii udává další způsob hodnocení; **shody** obsahu učebnic **s kurikulárními materiály** včetně rozšiřujícího učiva.

- Metoda komparativní

Komparace je založena na výsledcích předcházejících metod a zabývá se vzájemným srovnáním řad učebnic od různých nakladatelství.

Posledním kritériem srovnání jednotlivých sad učebnic je jejich doporučená **cena.** Finanční stránka není v dnešní situaci ve školství opomenutelnou záležitostí, ale v samotném výzkumu je spíše doplňující informací.

6.2 Hodnocené učebnice

Předmětem analýzy byly řady učebnic vydané v nakladatelství Prodos, Prometheus, SPN - pedagogickém nakladatelství a německém nakladatelství Schroedel. Výběr byl proveden podle částečné osobní zkušenosti s některými tituly. Řada německých učebnic byla vybrána za účelem zajímavého srovnání s cizojazyčnou literaturou a z důvodu úzké spolupráce mnohých libereckých základních škol se školami podobného typu v Německu.

První analyzovanou sadou učebnic pro druhý stupeň základní školy jsou učebnice Matematika pro 6. ročník, Matematika pro 7. ročník, Matematika pro 8. ročník a Matematika pro 9. ročník od autorů doc. RNDr. Oldřicha Odvárky, DrSc. a doc. RNDr. Jiřího Kadlečka, CSc. Celý set učebnic určený pro šestý ročník se skládá ze tří tématicky rozdělených knih pro žáky a dále z materiálů, které nebyly podrobeny analýze: sbírka úloh nabízející příklady pro procvičení učiva celého ročníku a příručka pro učitele. Stejně početný set pokrývající osnovami předepsané učivo je nabízen vydavatelstvím Prometheus pro každý ročník druhého stupně základní školy.

Druhá hodnocená řada učebnic pro základní školu je napsána prom. pedagogem Josefem Trejbalem, který spolupracoval na knihách pro jednotlivé ročníky vždy s různým kolektivem autorů. Učebnice vydané v SPN - pedagogickém nakladatelství jsou opět nazvány Matematika pro 6.ročník, Matematika pro 7. ročník, Matematika pro 8. ročník a Matematika pro 9. ročník a pro každý školní rok je učivo rozděleno chronologicky do dvou knih. Součástí těchto učebnic není žádná sbírka ani příručka pro učitele. Stejný autor dodatečně napsal Sbírku úloh pro 6. a 7. ročník a pro 8. a 9. ročník, ale ty nejsou zahrnuty v hodnocení.

Poslední analyzovaný zástupce českých učebnic je vydaný nakladatelstvím Prodos pod tradičním názvem Matematika 6, Matematika 7, Matematika 8 a Matematika 9. Hlavním autorem je RNDr. Jan Molnár, CSc., který spolupracoval podobně jako Trejbal na učebnicích pro jednotlivé ročníky s různými autory. Sada pro jeden ročník je vydávána ve verzi pro žáky a pro učitele, která navíc obsahuje metodické poznámky k učivu v průběhu celé učebnice. Každá z verzí knih je složena z učebnice a dvou pracovních sešitů.

Jedinou cizojazyčnou zkoumanou sadou učebnic je německá Mathematik Heute 5, Mathematik Heute 6, Mathematik Heute 7, Mathematik Heute 8, Mathematik Heute 9, Mathematik Heute 10, jejichž autory jsou Professor Dr. Heinz Griesel a Professor Helmut Postel. Pro jednotlivé ročníky vydalo nakladatelství Schroedel pouze jednu knihu obsahující veškeré učivo daného ročníku. Informace o dalších doplňkových materiálech bohužel nebyly získány. Menší problém se vyskytl při srovnání těchto učebnic s českými, protože v Německu je zavedena povinná desetiletá docházka na základní škole a druhý stupeň je plněn v průběhu šesti let na rozdíl od českého čtyřletého. Práce se s tímto faktem snaží vždy maximálně objektivně vyrovnat.

7. VÝSLEDKY ANALÝZ

7.1 Učebnice doc. Odvárky

Desky těchto učebnic jsou výrazně barevné, což zvyšuje jejich atraktivitu nejen pro žáky, ale i pro učitele. Ovšem vnitřní listy obsahují vedle černé už bohužel pouze jednu další barvu, kterou je modrá popřípadě zelená. Autor se snaží tento malý nedostatek nahradit vtipností odpočinkových obrázků. Učebnice jsou výborně členěny na tématické celky do jednotlivých dílů a rovněž v rámci každé knihy. Text je velice stručný, především zpřehledněný a zvýrazněný barevným ohraničením. Přehlednost, jasná posloupnost motivace, výkladu, procvičení a závěrečného opakování jsou jednoznačně předností této řady učebnic. Autor aplikuje učivo na praktické úlohy a propojuje matematiku se situacemi z běžného života. Nedostatkem Odvárkových učebnic jsou chybějící doplňující texty, náměty pro mimoškolní činnost, ale také předmluva a návod na práci s učebnicí.

Tab. č. 1: Didaktická vybavenost.

Charakteristika*)	1	2	3	4	5
1. Barevnost			+		
2. Členění učebnice na témat.celky	+				
3. Doplňující texty (dokument. materiál, citace apod.)					+
4. Otázky a cvičení		+			
5. Instrukce k úkolům vyšší náročnosti					+
6. Marginálie, výhmaty, živá záhlaví aj.		+			
7. Náměty pro mimoškolní činnosti					+
8. Návod pro práci s učebnicí (pro učitele/žáky)					+
9. Obsah učebnice	+				
10. Odkazy na jiné zdroje (doporučená lit.apod.)					+
11. Odlišení částí učiva (základní-rozšiřující)					+
12. Označení obtížnosti příkladů				+	
13. Pozn.a vysvětlivky (pod čarou, v textu)	+				
14. Rejstřík (věcný, jmenný,smíšený)		+			
15. Shoda s kurikul.materiály	+				
16. Shrnutí učiva k tématům/kapitolám		+			
17. Slovníček pojmů, cizích slov					+
18. Výkladový text prostý			+		
19. Výkladový text zpřehledněný	+				
20. Výsledky cvičení a úkolů	+				

*) 1 výborná prezentace komponentu, 2 přijatelná, 3 slabá, 4 nevyhovující, 5 nevyskytuje se

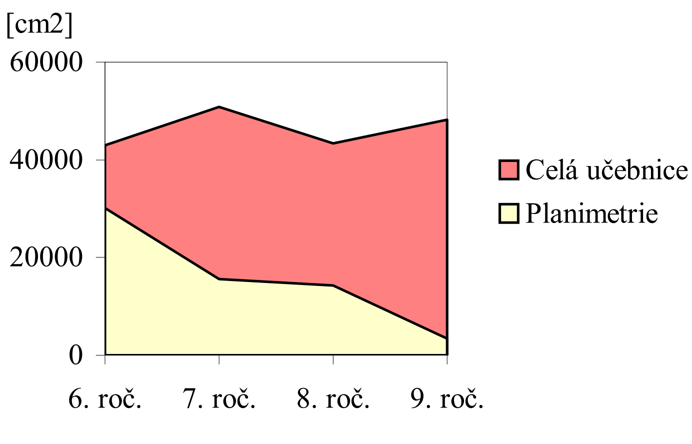
Podíl verbálních a neverbálních složek (viz. Tab. č 2) se v učebnicích všech ročníků ukazuje spíše vyrovnaný. Výkyvy mezi jednotlivými díly v rámci ročníků jsou dány tématickými celky, které daná učebnice zahrnuje. Zařazení geometrie do samostatného dílu je jednou z nevýhod Odvárkových učebnic a v průběhu roku vyžaduje střídání jednotlivých knih (pokud vyučujeme bloky algebry a geometrie střídavě). Vyšší hodnoty zastoupení grafické složky v kapitolách věnovaných planimetrii je předpokládaný a jednoznačně pozitivní závěr.

Tab. č. 2: Plošný rozsah učebnice a kapitol planimetrie.

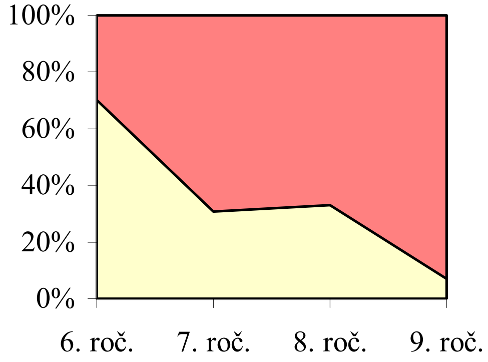
		Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie
Ročník:		6.		7.		8.		9.	
Verbální	1. díl	66,5	18,6	56,6	0	62,7	9,9	58,6	0
složka	2. díl	61,2	0	50,1	0	52,1	0	45	20
(v %)	3. díl	43,3	61	41,3	68,8	46,6	76,5	52,8	0
	1.-3.díl	56,7	22,9	49,4	19,3	54,4	25,5	52	6,1
Neverbální	1. díl	33,5	92,3	43,4	0	37,3	14,5	41,4	0
složka	2. díl	38,8	0	49,9	0	47,9	0	55	17,6
(v %)	3. díl	56,7	57,6	58,7	75	53,4	75,4	47,2	0
	1.-3.díl	43,3	56,7	50,6	30,7	45,6	33,1	48	7,1

Neverbální složky zahrnují veškeré grafické projevy vyskytující se v učebnicích, např. obrázky, grafy, tabulky. Jejich podíl v učebnicích jednotlivých ročníků je téměř vyrovnaný (viz. Graf č. 1), ale rozsah v kapitolách věnovaných planimetrii znatelně klesá v sedmém a devátém ročníku. Pokles je způsoben v prvním případě především snížením rozměrů ilustrací (viz. Graf č. 2) a v druhém případě malým rozsahem planimetrie v učebnici devátého ročníku (viz. Čl. 5.4).

Graf č. 1: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v cm^2).



Graf č. 2: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v %).

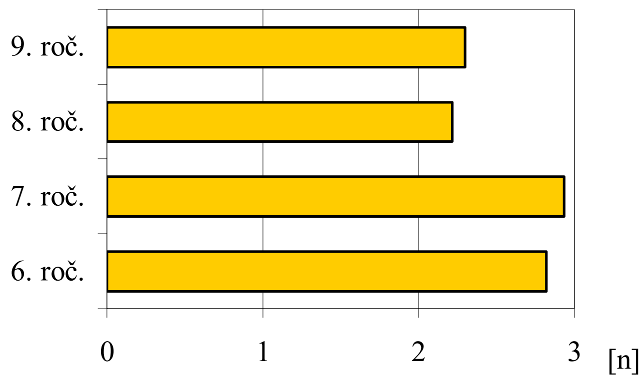


Různé ilustrační prvky jsou v učebnicích velice důležité; oživují souvislý text, zvyšují přitažlivost učebnice, ale především názorně demonstrují problematiku vysvětlovanou slovy, jejich průměrný počet a velikost je uveden v Tab. č. 3 a názorně zobrazen v grafu č. 3 a č. 4. Odvárkovy knihy obsahují kromě těchto také vtipné ilustrace odlehčující učivo a motivující žáky k výpočtům (viz. Příloha I).

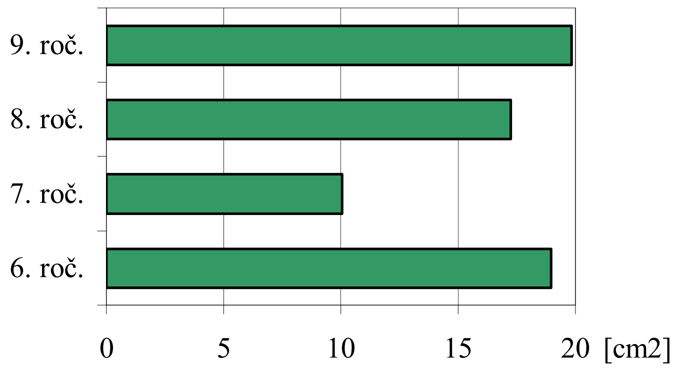
Tab. č 3: Ilustrace.

	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.
Průměrný počet na stránce	2,82	2,94	2,22	2,30
Průměrná velikost (v cm^2)	18,95	10,05	17,25	19,84

Graf č. 3: Průměrný počet ilustrací na stránce.

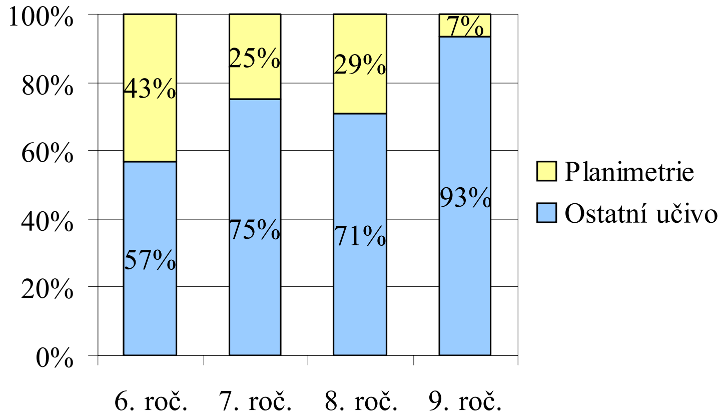


Graf č. 4: Průměrná velikost ilustrací.

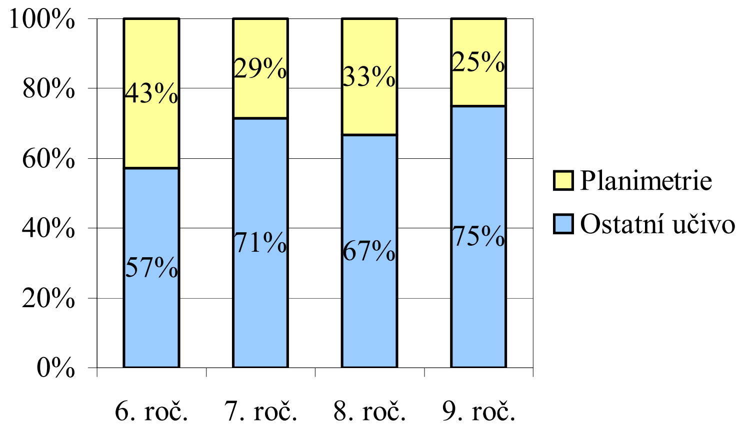


Níže uvedený graf č. 5 znázorňuje poměr počtu všech stran v učebnicích jednotlivých ročníků a počtu stran věnovaných planimetrii. Následující graf č. 6 ukazuje poměr počtu všech tématických celků a kapitol prezentujících planimetrii podle vzdělávacího programu ZŠ. Obě znázornění se nápadně shodují, z této shody vyplývá, že autor učebnic docílil požadovaných rozsahových parametrů planimetrie vzhledem k ostatnímu učivu daných ročníků. Jedinou výjimkou je devátý ročník, kde osnovy uvádějí alternativní celek Základy rýsování (viz. Čl. 5.4), který ovšem v Odvárkových učebnicích chybí.

Graf č. 5: Poměr počtu stran o planimetrii a počtu stran ostatního učiva.



Graf č. 6: Poměr planimetrie a ostatních témat. celků (podle osnov).



Průměrná hodnota počtu slov připadající na jednu vyučovací hodinu je nejvyšší v učebnici pro sedmý ročník (viz. Tab. č. 4). Stejně tak přírůstek verbální složky je v tomto ročníku značně vysoký. Tento závěr není nijak překvapivý vzhledem k rozsahu učebnic a také množství učiva, které je předepsáno osnovami.

Tab. č. 4: Rozsah verbální složky měřený počtem slov

Ročník	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.
Počet slov celkem	22175	26037	24576	25280
Počet slov na jednu vyučovací hodinu	168	197,3	186,2	191,5
Přírůstek resp. úbytek v %		17,4	-5,6	2,9

Učebnice vytvořené kolektivem autorů v čele s doc. Odvárkou mají doložku MŠMT ČR. Jak již bylo uvedeno, učivo je v každém ročníku rozděleno do tří dílů učebnice. Geometrie je zpravidla sepsána v jednom z nich. Jedinou výjimkou je opakování geometrie v prvním díle učebnice šestého ročníku. Obsahová stránka nemá žádné znatelné nedostatky. Všechno základní učivo je pokryto v míře požadované osnovami, některé celky jsou obohaceny o učivo rozšiřující. Učebnice jsou vhodné i pro samostudium, učivo je vysvětleno srozumitelným způsobem a pokud žák ve škole chybí, měl by být schopen doučit se podle učebnice sám popřípadě s pomocí rodičů. Další výhodou jsou úlohy, kde Pepa, průvodce všemi učebnicemi, navrhuje svá řešení různých úloh. Bohužel v každém Pepově řešení se vždy skrývá chyba a úkolem žáků je ji najít a opravit, což je velice výchovné. Texty jednotlivých zadání příkladů jsou poměrně složité a mohou činit žákům problémy při čtení a následujícím postupu řešení, ale i to je pravděpodobně záměrem autora. Nevýhodou je malé procento obtížnějších úloh, v tomto případě je učitel nucen použít různé sbírky příkladů a zadat je sám. Geometrie přesně navazuje na osnovy. Obsahuje všechno zásadní učivo, ovšem téměř neobsahuje učivo rozšiřující. Výjimku tvoří výklad úhlů šestého ročníku, kde jsou kromě povinných pojmů vysvětleny také souhlasné a střídavé úhly, učivo trojúhelníku zahrnuje i výklad pojmu těžiště a jeho vlastností, Pythagorova věta včetně obrácené jsou aplikovány v rovině a v prostoru na příkladech z praxe. Velkou předností jsou řešené konstrukční úlohy přesně ve fázích rozboru, konstrukce, zápis konstrukce, diskuse řešení a zkoušky. Zápis konstrukce je u vzorových řešení zapsán slovně i symboly a vlastní konstrukce je rozdělena do několika názorných kroků.

7.2 Učebnice prom. pedagoga Trejbala

Barevné zpracování Trejbalových učebnic je velmi podobné provedení učebnic vydaných nakladatelstvím Prometheus. Pod barevnými deskami se skrývají listy pouze s dvěma barvami. Klasicky černý text je doplněn modrou barvou. Přestože jsou učebnice členěny na tématické celky podle vzdělávacího programu, dělení učiva do dvou dílů v rámci jednoho ročníku není tématicky omezeno. První díl obsahuje jednoduše první část učiva daného ročníku a druhý díl zbývající učivo. Otázky a úkoly jsou rozlišeny značkami podle obtížnosti, některé náročnější úkoly jsou doplněny krátkými poznámkami napomáhajícími při postupu řešení příkladu. Učebnice opět postrádá návod pro práci s ní. Ovšem nalezneme zde několik námětů pro mimoškolní činnost. Text je členěn do dvou sloupců, které zásadně brání přehlednosti. Výkladová část textu není znatelně oddělena od dalších částí učebnice. Verbální složka není názorně členěna na odpovídající části hodiny a působí monotónním dojmem. Každý výklad je aplikován na vzorovém příkladě s kompletním řešením. Důležité poučky a věty jsou zvýrazněné modrým rámečkem a nápisem Zapamatujte si!. Rozšiřující učivo je celé na modrém podkladě. Řešení a výsledky na konci učebnice jsou pouze k souhrnným cvičením.

Tab. č. 5: Didaktická vybavenost

Charakteristika *)	1	2	3	4	5
1. Barevnost			+		
2. Členění učebnice na témat.celky		+			
3. Doplňující texty (dokument.materiál, citace z pramenů apod.)					+
4. Otázky a cvičení		+			
5. Instrukce k úkolům vyšší náročnosti				+	
6. Marginálie, výhmaty, živá záhlaví aj.			+		
7. Náměty pro mimoškolní činnosti			+		
8. Návod pro práci s učebnicí (pro učitele/žáky)					+
9. Obsah učebnice		+			
10. Odkazy na jiné zdroje (doporučená lit.apod.)					+
11. Odlišení částí učiva (základní-rozšiřující)		+			
12. Označení obtížnosti příkladů		+			
13. Pozn.a vysvětlivky (pod čarou, v textu)			+		
14. Rejstřík (věcný, jmenný,smíšený)					+
15. Shoda s kurikul. materiály		+			
16. Shrnutí učiva k tématům/kapitolám			+		
17. Slovníček pojmů, cizích slov		+			
18. Výkladový text prostý				+	
19. Výkladový text zpřehledněný		+			
20. Výsledky cvičení a úkolů			+		

*) 1 výborná prezentace komponentu, 2 přijatelná, 3 slabá, 4 nevyhovující,
5 nevyskytuje se

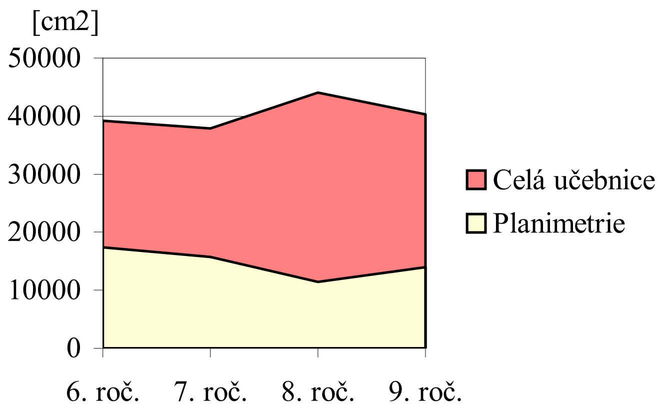
Z níže uvedené tabulky č. 6 vyplývá, že v učebnicích mírně převládá verbální složka nad grafickou. Je to dáno větším obsahem výkladového textu než tomu bylo v učebnicích od doc. Odvárky. Převaha textu nad ilustrovanou částí učebnice je v obou dílech v rámci jednotlivých ročníků podobná, protože jsou díly vytvořeny zcela podle chronologického postupu osnov nikoli tématicky.

Tab. č 6: Plošný rozsah učebnice a kapitol planimetrie

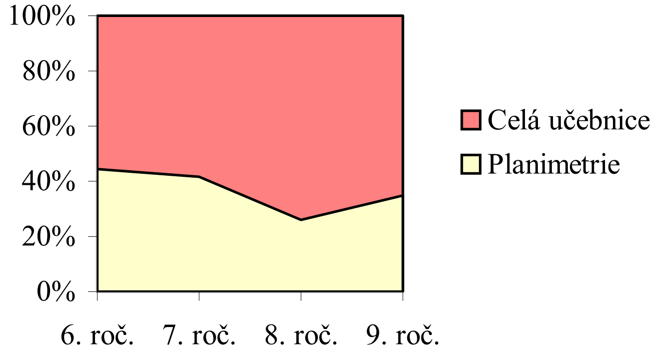
		Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie
Ročník:		6.		7.		8.		9.	
Verbální	1. díl	59,8	27,7	63	22,3	50,9	37,2	62,4	26,1
složka	2. díl	59,7	29,9	61,8	19,6	57,4	18,5	57,1	23,7
(v %)	1.-2.díl	59,7	28,8	62,4	21	54,3	27	59,8	24,9
Neverbální	1. díl	40,2	45,9	37	45,9	49,1	32,7	37,6	35,3
složka	2. díl	40,3	43,2	38,2	37,5	42,6	18,7	42,9	34,3
(v %)	1.-2.díl	40,3	44,5	37,6	41,6	45,7	26	40,2	34,8

Grafické struktury v této sady učebnic jsou v menším zastoupení než v Odvárkových (viz. Graf č. 1). Značný rozdíl se projevuje v učebnici určené pro šestou třídu ZŠ. Při srovnání kapitol planimetrie v knihách jednotlivých ročníků docházíme k závěru, že podíl jejich neverbálních složek je vyrovnaný, větší zlom nastává v osmém ročníku, což ovlivnil především nejmenší počet obrazových komponentů ze všech ročníků.

Graf č. 7: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v cm^2).



Graf č. 8: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v %).

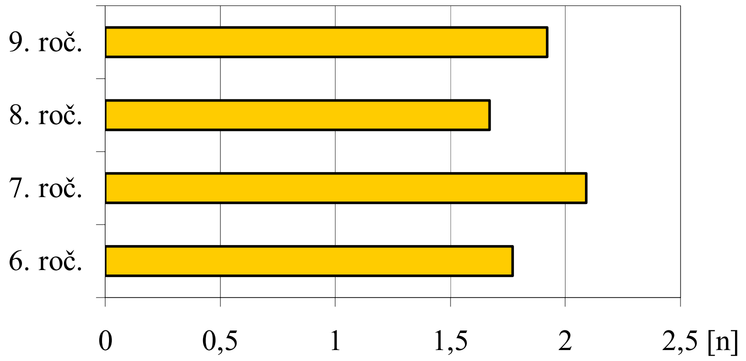


Ilustrace jsou dominantou stránek učebnice, protože jsou poměrně velké (viz. Příloha). Naopak některé stránky (což se netýká planimetrie) úplně postrádají oživení alespoň malinkým obrázkem. Odvárkovy učebnice mají menší formát, ale ve všech ročnících průměrný počet obrázků na stránce překročil hranici dvou (viz. Tab. č. 3). Je samozřejmé, že jsou obrázky v Odvárkových učebnicích menší, ale vždy dosahují svého účelu. Velký rozměr u Trejbalových učebnic (viz. Tab. č. 7) je sice názornější, ale zase neumožňuje autorovi použití obrázků v tak hojném počet, při dodržení stejného rozsahu počtu stran.

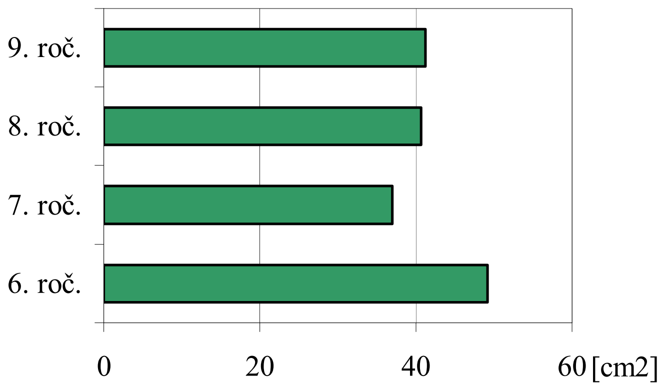
Tab. č 7: Ilustrace.

	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.
Průměrný počet na stránce	1,77	2,09	1,67	1,92
Průměrná velikost (v cm^2)	49,21	37	40,65	41,19

Graf č. 9: Průměrný počet ilustrací na stránce.

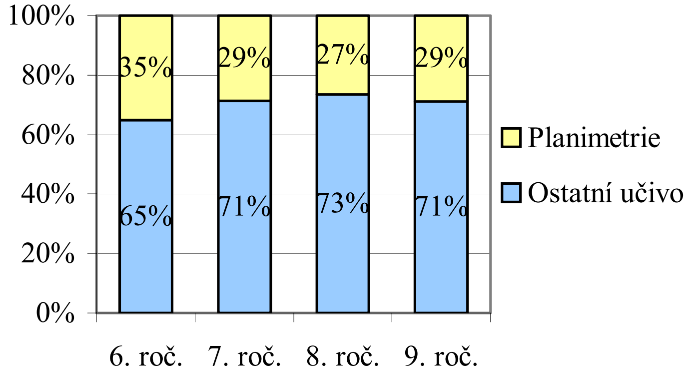


Graf č. 10: Průměrná velikost ilustrací.

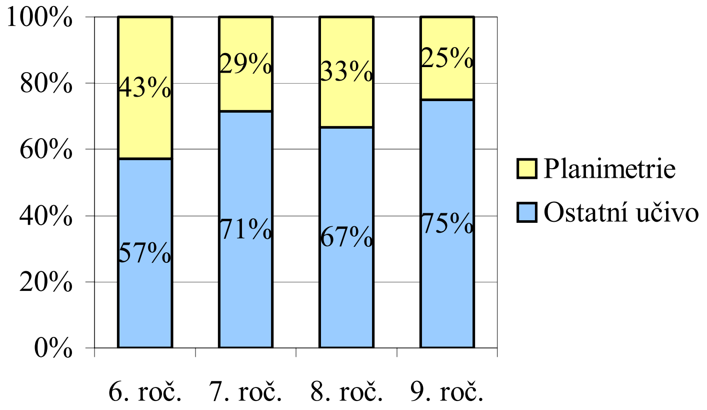


Jak znázorňují níže uvedené grafy č. 11 a č. 12, počet stran prezentující učivo planimetrie je v Trejbalových učebnicích nižší než bychom předpokládaly z hodnot daných vzdělávacím programem. Učebnice věnují více prostoru ostatnímu učivu na úkor planimetrie, maximální rozdíl hodnot činí 8 %.

Graf č. 11: Poměr počtu stran o planimetrii a počtu stran ostatního učiva



Graf č. 12: Poměr planimetrie a ostatních témat. celků (podle osnov).



Vyšší podíl verbální složky se projevuje ve vyšších hodnotách počtu slov, což nutně zvyšuje hodnoty počtu slov připadajících na jednu vyučovací hodinu (viz. Tab. č. 8). Přírůstek resp. úbytek slov mezi učebnicemi jednotlivých ročníků ZŠ je hodnota poměrně nízká ve srovnání s učebnicemi nakladatelství Prometheus (viz. Tab. č. 4).

Tab. č. 8: Rozsah verbální složky měřený počtem slov

Ročník	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.
Počet slov	38095	40315,4	40206	43562,5
Počet slov na jednu vyučovací hodinu	288,6	305,4	304,6	330,0
Přírůstek resp. úbytek v %		5,8	-0,3	8,3

Učebnice z nakladatelství SPN - pedagogické nakladatelství byly samozřejmě také schváleny MŠMT ČR. Pro každý ročník je vydána dvoudílná sada, která přesně plní požadavky osnov a v mnohých oblastech je rozšířena o nadstavbové učivo. Jednotlivé tématické celky se střídají podle chronologického postupu ve vzdělávacím programu, geometrie není nijak vyčleněna. Hlavní netypickým rozdílem v porovnání s jakoukoli učebnicí je způsob řazení učiva do dvou sloupců. Nebyl shledán žádný důvod, proč to takto autor udělal, protože je to velkou nevýhodou. Text je nepřehledný, žák i učitel se na stránce špatně orientují. Situaci ještě ztěžuje číslování, které má také složitý systém. Několik odlišných druhů číslic označující příklady na jedné stránce ztěžuje učiteli práci při odkazu na učebnici. Není vždy jednoznačné, které číslování máme právě na mysli. Ani výklad učiva není přehledný, není vyčleněn z ostatního textu příkladů a tím znesnadňuje orientaci v učebnici. Naopak výborně je označeno rozšiřující učivo, je celé na modrém podkladě. Vzorové příklady jsou často jednoduché, ale pro procvičení autor uvádí příklady náročné místo, aby obtížnost gradovala postupně. Pro žáky jsou rozdíly úrovní příliš velké, což vyžaduje velkou snahu učitele dodat vlastní příklady doplňující posloupnost obtížnosti. Samostudium je s touto učebnicí téměř nemožné. Planimetrie je prezentována podle požadavků osnov, obsah rozšiřujícího učiva je znatelně širší než u učebnic doc. Odvárky. Nadstavbové učivo zahrnuje kromě souhlasných a střídavých úhlů a těžiště jak je tomu v Odvárkovy ještě navíc posunutí v sedmém ročníku, kružnicový oblouk a výseč, těžnice v osmé třídě a v učebnici určené pro závěrečný rok ZŠ prezentuje i alternativní celek Základy rýsování. Autor vkládá do učebnice krátké historické poznámky např. medailónky významných matematiků Thaleta a Pythagora včetně jejich portrétů.

7.3 Učebnice RNDr. Molnára

Učebnice autora RNDr. Molnára jsou svojí barevností jednoznačně nejpestřejší. To způsobily barvy nejen na deskách, ale i uvnitř učebnic. Jednodílné učebnice jsou členěny na tématické celky podle obvyklého klíče, tzn. vzdělávacího programu ZŠ. Počet otázek a úkolů je v učebnici přijatelný a navíc je možno čerpat z pracovních sešitů, které jsou vydávány společně s učebnicí. Postup řešení u úkolů s vyšší obtížností není uváděn, je ponecháno na učiteli, zda žákům pomůže či nikoli. Výkladový text je zpřehledněný. Velmi pěkně je provedeno zvýraznění pouček a shrnutí výkladu učiva. Zásadní poučky bývají vepsány do barevných polí jasně žluté barvy a tím upoutají vždy pozornost. Souhrnná cvičení jsou součástí každého závěru kapitoly. Jako jediná česká zkoumaná učebnice obsahuje návod pro práci s ní a zároveň plní úkol úvodu. Ve verzi vydávané pro učitele jsou zajímavým zpestřením barevné okraje věnované nápadům pro učitele, námětům na činnost v hodině a historickým poznámkám. Autor tyto okraje využívá k upozornění na obtížnější příklad nebo rozšiřující učivo.

Tab. č. 9: Didaktická vybavenost

Charakteristika *)	1	2	3	4	5
1. Barevnost	+				
2. Členění učebnice na témat.celky	+				
3. Doplňující texty (dokument.materiál, citace z pramenů apod.)	+				
4. Otázky a cvičení		+			
5. Instrukce k úkolům vyšší náročnosti			+		
6. Marginálie, výhmaty, živá záhlaví aj.	+				
7. Náměty pro mimoškolní činnosti			+		
8. Návod pro práci s učebnicí (pro učitele/žáky)	+				
9. Obsah učebnice		+			
10. Odkazy na jiné zdroje (doporučená lit.apod.)		+			
11. Odlišení částí učiva (základní-rozšiřující)		+			
12. Označení obtížnosti příkladů		+			
13. Pozn.a vysvětlivky (pod čarou, v textu)	+				
14. Rejstřík (věcný, jmenný,smíšený)					+
15. Shoda s kurikul. materiály	+				
16. Shrnutí učiva k tématům/kapitolám		+			
17. Slovníček pojmů, cizích slov					+
18. Výkladový text prostý			+		
19. Výkladový text zpřehledněný	+				
20. Výsledky cvičení a úkolů	+				

*) 1 výborná prezentace komponentu, 2 přijatelná, 3 slabá, 4 nevyhovující, 5 nevyskytuje se

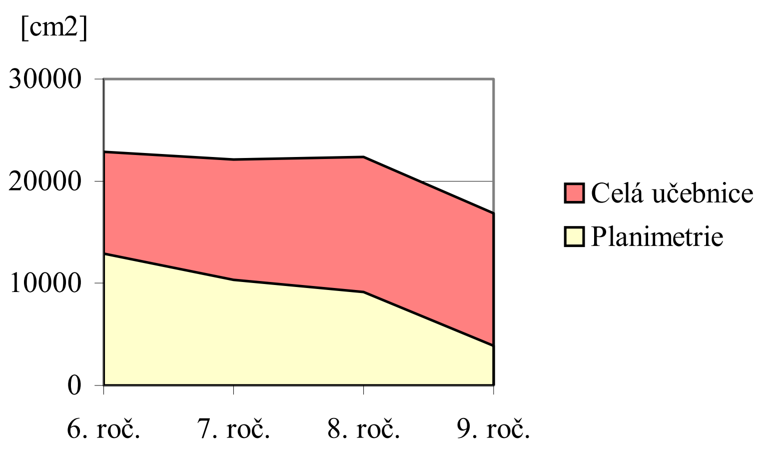
Plošný rozsah verbální složky (viz. Tab. č. 10) je podobně jako u učebnic nakladatelství SPN – pedagogické nakladatelství (viz. Tab. č. 6), mírně dominujícím prvkem. Neverbální složka s přibývajícím věkem žáků klesá. V kapitolách věnovaných planimetrii je jednoznačně převažující neverbální složka, ovšem opět její hodnoty znatelně klesají ve vyšších ročnících ZŠ.

Tab. č 10: Plošný rozsah učebnice a kapitol planimetrie

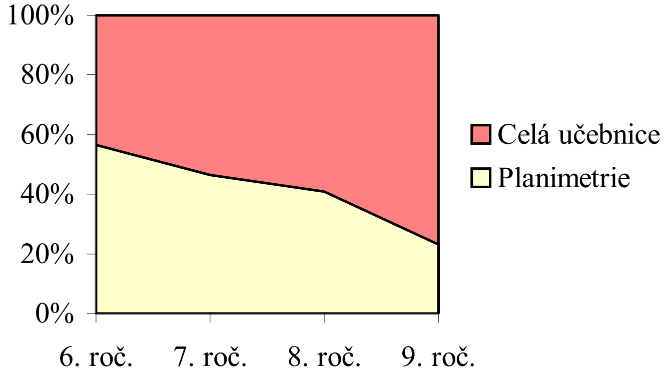
	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie
Ročník:	6.		7.		8.		9.	
Verbální složka (v %)	58,4	35,1	63,8	26,8	63,4	28,9	65,5	15,5
Neverbální složka (v %)	41,6	56,5	36,2	46,6	36,6	40,9	34,5	23,1

Zastoupení grafických prvků v učebnicích nakladatelství Prodos je zatím nejvyrovnanější ze všech tří analyzovaných českých knih. Přepokládaný pokles v devátém ročníku je samozřejmě i u této řady učebnic. Jediným celkem učiva, který je zaměřen na planimetrii je v deváté třídě podobnost a přestože učebnice pro devátý ročník obsahuje ještě nepovinný alternativní celek, jsou hodnoty neverbálních složek v tomto ročníku stále nejnižší.

Graf č. 13: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v cm^2).



Graf č. 14: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v %).

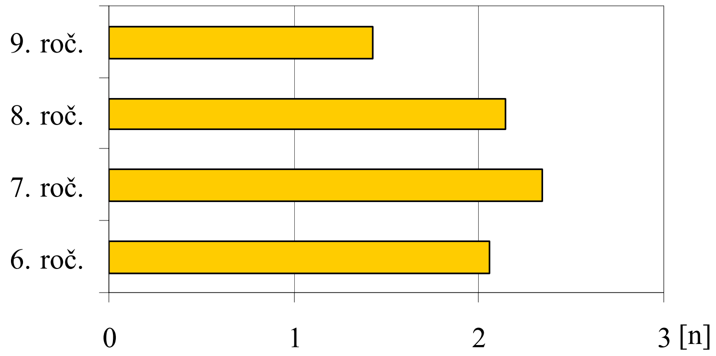


Jednotlivých ilustrací je v učebnicích hojný počet (viz. Tab. č. 11). Hodnoty ve všech třech ročnících překračují hranici dvou obrázků na stránce, u Odvárky (viz. Tab. č. 3) to jsou dokonce všechny čtyři hodnoty překračující tuto hranici, resp. blížící se třem. V devátém ročníku, jak se odvíjí z předchozích grafů č. 13 a č. 14, je nejmenší počet obrázků, ale jsou průměrně největší.

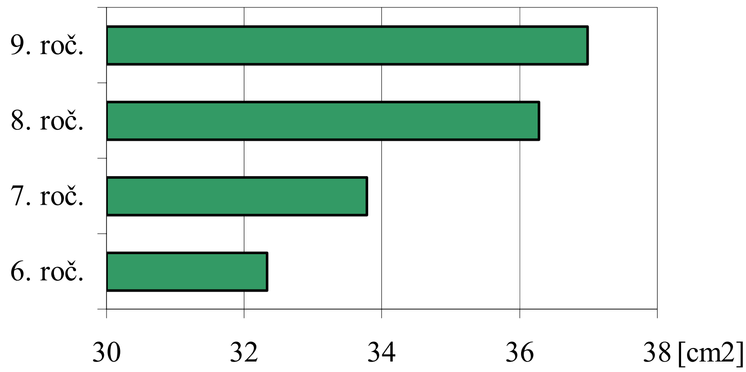
Tab. č. 11: Ilustrace.

	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.
Průměrný počet na stránce	2,06	2,34	2,14	1,43
Průměrná velikost (v cm^2)	32,33	33,78	36,28	36,99

Graf č. 15: Průměrný počet ilustrací na stránce.

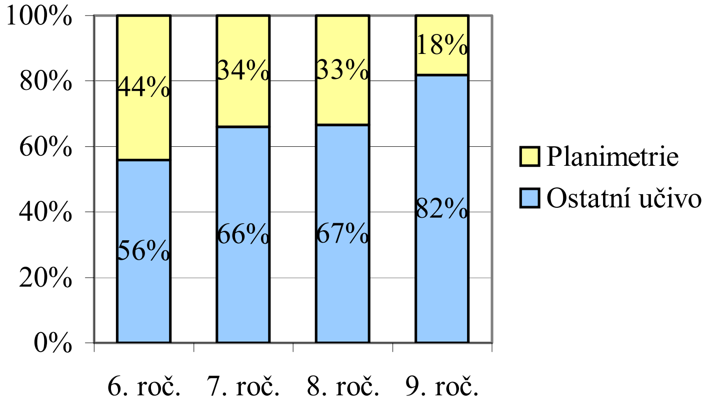


Graf č. 16: Průměrná velikost ilustrací.

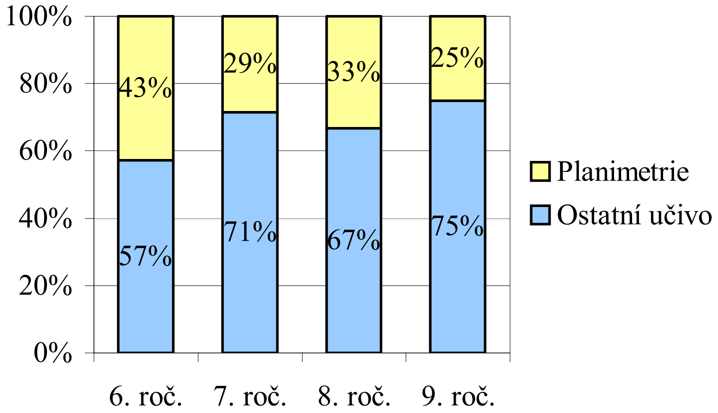


Tyto učebnice jako jediné dosahují ve třech ročnících, z toho ve dvou dokonce přesahují, předepsaný poměr planimetrie k ostatnímu učivu. To znamená, že dosahuje 129 % ze 130 % požadovaných. Obě hodnoty zahrnují Základy rýsování v deváté třídě, které podle osnov nejsou povinné.

Graf č. 17: Poměr počtu stran o planimetrii a počtu stran ostatního učiva.



Graf č. 18: Poměr planimetrie a ostatních témat. celků (podle osnov).



Počet slov v učebnicích se zpravidla v sedmé třídě znatelně zvyšuje (viz. Tab. č. 4 a č. 8), pak už většinou pouze klesá. Sada učebnic z nakladatelství Prodos není výjimkou. V sedmé a deváté třídě se dostáváme na hodnoty si velmi blízké, ale uvědomme si, že v deváté třídě má učebnice o 16 stran méně. Dalším prvenstvím těchto učebnic je nejnižší průměrný počet slov odpovídající jedné vyučovací hodině. V učebnicích od prom. pedagoga Trejbala je tato hodnota 2,5krát větší.

Tab. č. 12: Rozsah verbální složky měřený počtem slov

Ročník	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.
Počet slov celkem	15742	17300	16062	15373
Počet slov na jednu vyučovací hodinu	119	131	122	116
Přírůstek resp. úbytek v %		9,9	-7,2	-4,3

Učebnice od nakladatelství Prodos také získaly doložku ministerstva školství a staly se dotovanými učebnicemi pro ZŠ. Pro každý ročník je vydána pouze jedna kniha a dva pracovní sešity, stejná sada je vydávána ve verzi s komentářem pro učitele. Učivo je prezentováno v přesném chronologickém postupu jak je uvedeno v osnovách, střídá tedy algebru s geometrií. Výklad je psán jako stručný souvislý text. Velmi užitečné jsou přesně popisované postupy řešení vzorových příkladů, obrázky konstrukcí jsou rozfázované krok za krokem podle uvedených instrukcí. Pro zjednodušení kontroly jsou pro učitele nalezneme u vybraných příkladů správné výsledky. Některé příklady jsou navrženy jako vhodná domácí cvičení, jiné autor převzal z matematických olympiád nebo ze soutěže Matematický klokan. Učebnice jsou velice názorné, obsahují velké množství obrázků a jiných grafických prvků. Velkou výhodou učebnic určených učitelům jsou barevné glosy po stranách listů učebnice, které obsahují mimo jiné metodické poznámky, odpovědi na kontrolní otázky, správné postupy a výsledky, vysvětlivky, odkazy na odbornou literaturu a různé zajímavosti. Sada učebnic nakladatelství Prodos je jednou z nejnovějších a pokouší se reagovat na vývoj ve vzdělávacím systému. Důkazem jsou odkazy na mezipředmětové a meziročníkové vztahy. Učebnice pro všechny ročníky obsahují návrh časového a tématického plánu na celý školní rok.

7.4 Učebnice Professora Dr. Griesela

Učebnice od Professora Dr. Griesela se svojí barevností odpovídají českým učebnicím vydaných nakladatelstvím Prodos, ovšem jednotlivé ilustrace jsou svým grafickým ztvárněním na vyšší úrovni než-li české. Každému ročníku odpovídá jedna kniha členěná do kapitol. V rámci každé kapitoly nalezneme další užitečné dělení. Nová kapitola začíná Úkolem, pokračuje částí Řešení, dále Informace, Upevnění a další práce, Týmová práce a uzavírají Cvičení. Algebra začíná výklad v učebnici a geometrie bývá zařazena ve druhé polovině knihy. Obvykle je planimetrie následována stereometrií. Příkladů a cvičení je dostačující množství, obtížnější úkoly jsou barevně označeny. Řešení příkladů nalezne žák na konci kapitol. Výkladový text je stručný, přehledný. Jednotlivé závěry a poučky jsou zvýrazněny barevným rámováním. Efektivní vysvětlivky k obrázkům jsou zasazeny přímo u komentované problematiky. Rozšiřující učivo je odlišeno barevnou značkou u nadpisu kapitoly. Na úplném začátku učebnice je napsán úvod, návod vysvětlující členění učebnice a poznámky k diferencovanosti učiva i úkolů. Na konci učebnice nalezneme slovníček pojmů.

Tab. č. 13: Didaktická vybavenost

Charakteristika *)	1	2	3	4	5
1. Barevnost	+				
2. Členění učebnice na témat.celky	+				
3. Doplňující texty (dokument.materiál, citace z pramenů apod.)			+		
4. Otázky a cvičení	+				
5. Instrukce k úkolům vyšší náročnosti		+			
6. Marginálie, výhmaty, živá záhlaví aj.	+				
7. Náměty pro mimoškolní činnosti		+			
8. Návod pro práci s učebnicí (pro učitele/žáky)	+				
9. Obsah učebnice	+				
10. Odkazy na jiné zdroje (doporučená lit.apod.)					+
11. Odlišení částí učiva (základní-rozšiřující)	+				
12. Označení obtížnosti příkladů	+				
13. Pozn.a vysvětlivky (pod čarou, v textu)		+			
14. Rejstřík (věcný, jmenný,smíšený)		+			
15. Shoda s kurikul.materiály **)	o	o	o	o	o
16. Shrnutí učiva k tématům/kapitolám		+			
17. Slovníček pojmů, cizích slov		+			
18. Výkladový text prostý	+				
19. Výkladový text zpřehledněný	+				
20. Výsledky cvičení a úkolů		+			

*) 1 výborná prezentace komponentu, 2 přijatelná, 3 slabá, 4 nevyhovující, 5 nevyskytuje se
**) Shoda s kurikulárními materiály není porovnána, protože nemáme k dispozici německý vzdělávací program.

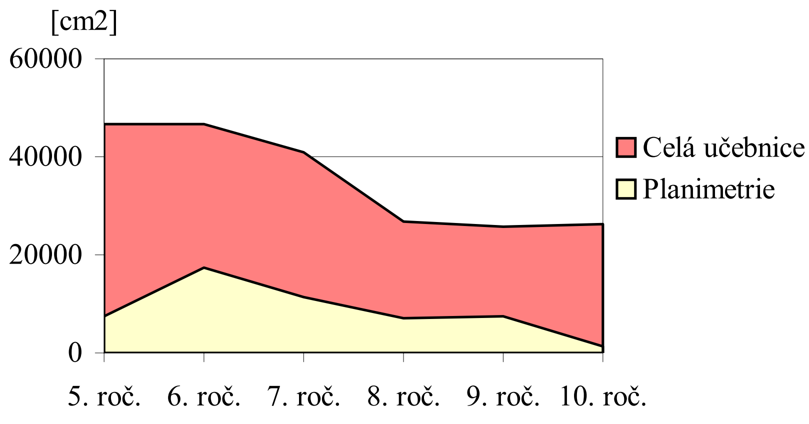
Z tabulky plošného rozsahu (viz. Tab. č. 14) vyvozujeme závěr, že v německých, podobně jako v českých učebnicích převládají verbální složky. V průběhu školní docházky tento rozdíl narůstá. Podíl složek v planimetrických kapitolách je vyrovnaný v prvních čtyřech letech studia. Desátý ročník se vymyká, protože v tomto ročníku je planimetrii věnovaná pouze malá část ze závěrečného procvičování.

Tab. č. 14: Plošný rozsah učebnice a kapitol planimetrie

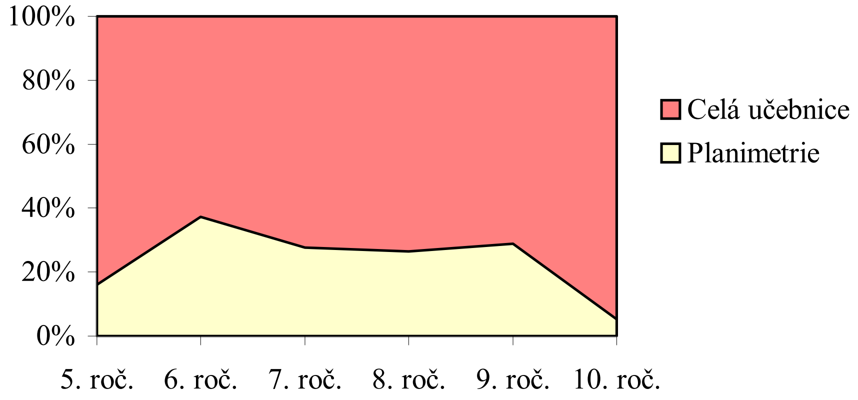
	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie
Ročník:	5.		6.		7.	
Verbální složka složka (v %)	57,1	16,3	62,5	23,3	58,7	21,8
Neverbální složka (v %)	42,9	16,1	37,5	37,3	41,3	27,7
	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie	Učebnice	Planimetrie
Ročník:	8.		9.		10.	
Verbální složka složka (v %)	72,0	19,2	74,1	18,8	72,5	2,1
Neverbální složka (v %)	28,0	26,4	25,9	28,8	27,5	5,2

Učebnice pátého ročníku je nejrozsáhlejší celkovým počtem stran. Jak je patrné z následujícího grafu č. 19, velký plošný rozsah se projevil i v menším rozsahu neverbální složky v učebnici pátého ročníku. Ovšem planimetrie není příliš zastoupenou složkou učiva, proto je celkově rozsah jejích neverbálních složek tak omezený. V desátém ročníku, kde se planimetrie pouze opakuje a částečně prohlubuje, je její nízká hodnota pochopitelná.

Graf č. 19: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v cm^2).



Graf č. 20: Podíl grafické složky v celé učebnici a v kapitolách planimetrie (v %).

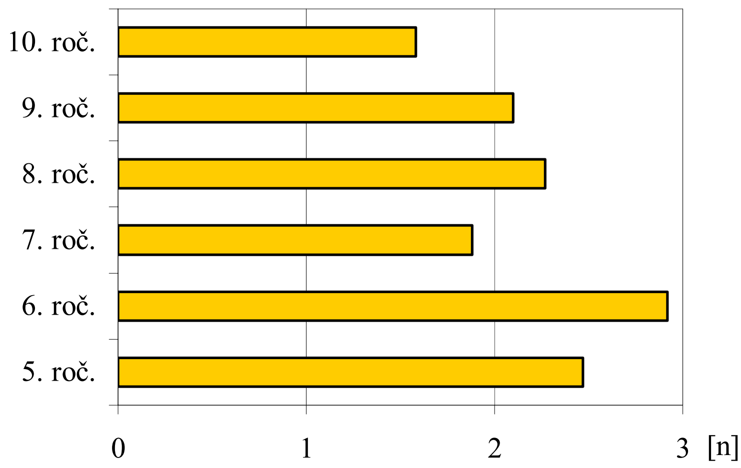


Vývoj hodnot v tabulce německých ilustrací je velmi podobný českým hodnotám. S přibývajícím věkem žáků se průměrný počet obrázků v učebnici zmenšuje, ale zvětšuje se jejich průměrná velikost. Zvětšování velikosti si většinou žádá učivo a složitější ilustrace.

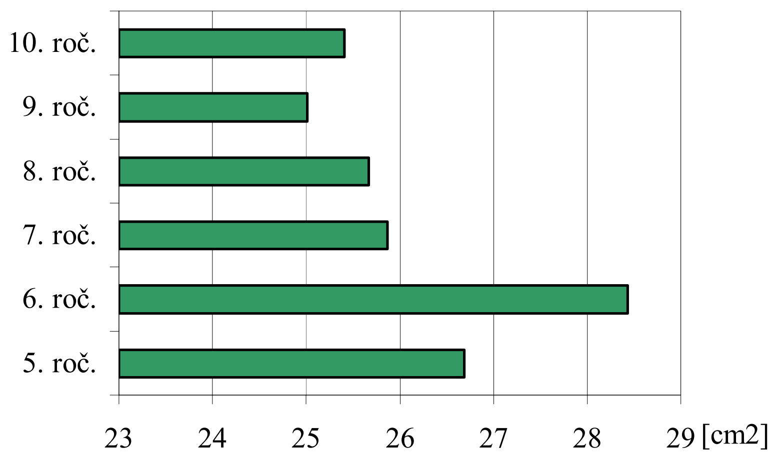
Tab. č. 15: Ilustrace

	5. roč.	6. roč.	7. roč.	8. roč.	9. roč.	10. roč.
Průměrný počet na stránce	2,47	2,92	1,88	2,27	2,10	1,58
Průměrná velikost (v cm^2)	26,69	28,43	25,87	25,67	25,01	25,41

Graf č. 21: Průměrný počet ilustrací na stránce

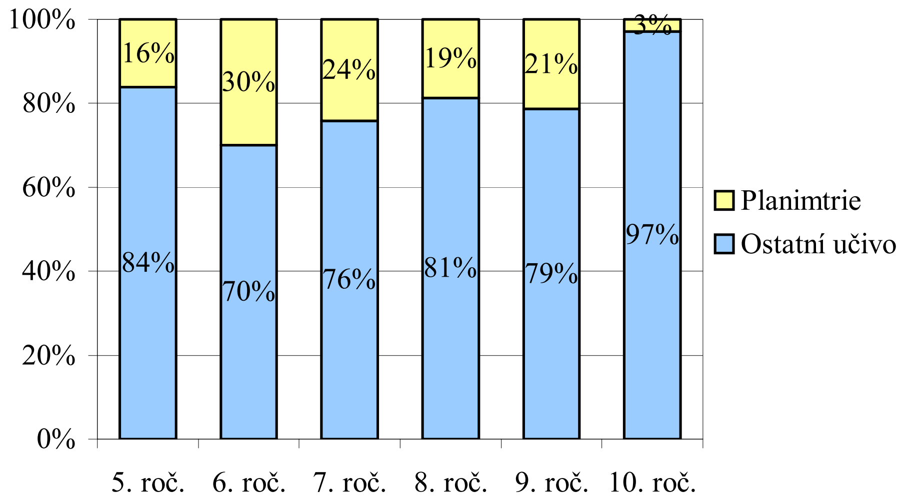


Graf č. 22: Průměrná velikost ilustrací



Níže uvedený graf č. 23 znázorňuje jakou část v procentech věnují německé učebnice planimetrii a jakou ostatnímu učivu. Bohužel neporovnáme tyto hodnoty s německým vzdělávacím programem, protože ho nemáme k dispozici. Pokud bychom uvedené hodnoty porovnali s českým vzdělávacím programem (ovšem pouze v šestém až devátém ročníku) došli bychom k rozdílným závěrům. Hodnoty uvedené v grafu jsou ve všech případech nižší než hodnoty vypočtené vyhodnocením českých osnov, ovšem pokud bychom vzali v úvahu rozložení učiva na více ročníků, klesne německá planimetrie ještě hlouběji pod hranici českých osnov.

Graf č. 23: Poměr počtu stran o planimetrii a počtu stran ostatního učiva



Na tomto místě je pravidelně uvedena tabulka demonstrující rozsah verbální složky učebnic charakterizovaný počtem slov. Učebnice nakladatelství Schroedel jsou pochopitelně psány v německém jazyce, který se svojí strukturou značně liší od českého. Odlišná skladba jazyka nedovoluje aplikovat stejnou metodu měření verbální složky na oba jazyky. Porovnání počtu slov v učebnicích by nevedlo k žádným objektivním závěrům.

Již výše bylo zmíněno, že nemáme k dispozici německý vzdělávací program. Abychom mohli později provést porovnání obsahu českých a německých učebnic matematiky, uvedeme nyní náplň planimetrie jednotlivých ročníků podle obsahu analyzovaných učebnic.

Mathematik Heute, 5. ročník

Učivo planimetrie začíná na druhém stupni seznámením žáků s geometrickými obrazci (mnohoúhelníky), které jsou vyloženy v souřadnicovém systému. Dále se žáci seznamují s pojmem úsečka a přímka, odhalují vztah mezi přímkami v rovině. Naučí se základní konstrukce např. přímka, úsečka, kolmice k přímce apod. Využitím pásu mezi rovnoběžkami objevují rovnoběžník, obdélník, kosočtverec a čtverec. Zabývají se sítí těles, poznávají úhel a jeho vlastnosti. Seznamují se také se zobrazením a osovou souměrností.

Mathematik Heute, 6. ročník

V následujícím ročníku si žáci zopakují vědomosti o zobrazení a doplňují je o posunutí a otočení. Rozšiřujícím učivem je složení předchozích zobrazení. Dále navazují na učivo o úhlech a zabývají se vrcholovými a vedlejšími úhly. Další kapitolou šestého ročníku je trojúhelník a jeho vlastnosti, která zahrnuje kružnici trojúhelníku vepsanou i opsanou, vlastnosti výšek, těžnic a těžiště. Planimetrie pokračuje v kapitole o shodnost útvarů, kde nalezneme věty o shodnosti trojúhelníků. Do tohoto ročníku jsou také zařazeny základní konstrukce využívající pravítka a kružítka.

Mathematik Heute, 7. ročník

V sedmém ročníku se učebnice opět vrací k učivu o trojúhelnících, učí počítat obvod a obsah. Učivo obohacuje rovnoběžníky a lichoběžníky. Rozšiřujícím učivem je deltoid. Dále se žáci seznamují s vlastnostmi kružnice, pojmem úseč a výseč, s různými polohami kružnice a přímky a také s vepsanou a opsanou kružnicí čtyřúhelníkům a trojúhelníku. V učebnici nechybí ani Thaletova věta a vlastnosti středového a obvodového úhlu.

Mathematik Heute, 8. ročník

Osmý ročník je stejně jako v českých učebnicích planimetrie věnován kružnici (v německých navíc bezprostředně navazuje válec). Všechny vlastnosti kružnice jsou podrobně probrána, opakují se polohy kružnice a přímky, kružnice vepsaná a opsaná čtyřúhelníku a trojúhelníku. Ještě jednou se opakuje Thaletova kružnice a výpočet obvodu a obsahu kružnice. Další kapitola se věnuje Pythagorově větě a jejímu praktickému užití.

Mathematik Heute, 9. ročník

Podobnost je v devátém ročníku vyložena ve stejném rozsahu jako v českých učebnicích. Kapitola začíná pojmem měřítko, pokračuje podobností mnohoúhelníků, trojúhelníků. Dále je vyslovena věta obrácená k Pythagorově větě a doplněna ještě Euklidovou větou o odvěsně. Jako rozšiřující učivo je uvedena Euklidova věta o výšce.

Mathematik Heute, 10. ročník

V posledním ročníku už není zařazena samostatná kapitola planimetrie. Učebnice se věnuje ostatnímu učivu. Pouze v praktických cvičeních shrnující veškeré učivo 2. stupně je zařazeno opakování vlastností úhlů. Učivo o úhlech je zde přehledně zopakováno, a potom procvičeno.

Učebnice Mathematik Heute vydané pro spolkovou zemi Sasko mají na každý rok určen jeden díl, který je dělen do dílčích kapitol. Geometrie je vždy zařazena v druhé polovině učebnice, tzn. že se jednotlivé kapitoly algebry a geometrie nestřídají. Velmi názorné je členění v rámci kapitoly. Každá kapitola je rozfázovaná vždy do stejných aktivit, což zaručuje pravidelnost činností. Grafická složka učebnice je na velmi vysoké úrovni. Úlohy jsou často orientované na praktické využití. Úkoly vyžadující více schopností jsou barevně označeny, obdobně je odlišeno rozšiřující učivo, jednak v obsahu učebnice a pak na začátku dané kapitoly. Výjimečně uvádí autor historické poznámky např. o Platónovi. Výhodou je rejstřík pojmů na konci učebnice, který usnadňuje hledání a orientaci v učebnici.

8. VYHODNOCENÍ

Závěrečné hodnocení je provedeno na základě komparace analýz jednotlivých řad učebnic, které jsou uvedeny v předcházejících článcích 6.3 - 6.6. Všechny učebnice byly podrobeny pečlivému zkoumání zaměřenému postupně na didaktickou vybavenost, komunikační parametry, vlastnosti textu a shodu s kurikulárními materiály. Doplňující, ale velmi praktická informace srovnává finanční náklady potřebné k vybavení žáků analyzovanými sadami učebnic.

8.1 Didaktická vybavenost

Shrnutím dílčích poznatků týkajících se úrovně grafického provedení jsme nuceni jednoznačně vyzdvihnout práci německých autorů. Nejen použitá škála barev je výrazně dominující nad barvami českých nakladatelství, kde bychom na srovnatelné úrovni uvedli snad jen učebnice nakladatelství Prodos, ale také praktické ztvárnění. Obrázky učebnic Mathematik Heute jsou velice ostré a přesné. Autoři často používají fotografie doplněné dokreslením zdůrazňující potřebný detail. Tento způsob ukazuje názorné propojení matematiky s praxí a užití získaných znalostí v praktickém životě. Ilustrace v českých učebnicích jsou samozřejmě také přesné a názorné, ale nedisponují takovou barevností, ostrostí a působí méně striktním dojmem.

Žádná z analyzovaných učebnic nepostrádá dělení na tématické celky. Tyto celky se ve všech zkoumaných řadách většinou ve větší či menší míře obsahově shodují. Ovšem řazení jednotlivých kapitol v učebnicích je již velmi odlišné. Setkáváme se s několika způsoby. Učebnice RNDr. Molnára důsledně sledují strukturu vzdělávacího programu a v jednodílné knize střídají algebru a geometrii. Rovněž německé knihy jsou pro každý ročník vydávány v jednom díle, ovšem geometrie je obvykle zařazena ve druhé polovině učebnice jako jeden tématický blok. Podobně dělení řeší doc. Odvárko, který geometrii zpravidla vyčleňuje do jednoho ze tří dílů učebnic pro jeden ročník. Výhodou je, že žáci nejsou nuceni nosit do školy těžkou jednosvazkovou knihu, ale na druhou stranu musí dbát, aby měli správný díl obsahující učivo, které aktuálně probírají. Kombinací zmíněných způsobů vzniká pravděpodobně nejvýhodnější členění prom. pedagoga Trejbala, který ve svých učebnicích dodržuje chronologii osnov, střídá algebru s geometrií a v polovině učivo rozděluje na dva méně objemné svazky.

Komponenty řídící práci s učebnicí jsou ve všech učebnicích zastoupeny srovnatelně. Obsah je samozřejmostí, ale neplatí to již o předmluvě nebo návodu pro práci s učebnicí. Nejhorší zastoupení zjišťujeme u rejstříku pojmů, který se vyskytuje pouze v učebnici Professora Dr. Griesela. Naopak rozšiřující učivo je různými způsoby odlišeno ve všech čtyřech sadách učebnic. Nejnápadnější způsob používá autor Trejbal, kde je celá nadstavbová část učiva zobrazena na barevném podkladě. Sympatické je odlišení už v obsahu u německých učebnic (pokud se týká celé kapitoly). Podobný stav je u značení obtížnosti, každá řada používá individuální na začátku uvedené značení (viz. Přílohy).

Text učebnic je ve všech případech stručný, často bývá strukturovaný do sledu úkolů jejichž plnění vede žáka k poznání. Názorné je toto členění zejména v německých učebnicích, kde je doplněno dílčími nadpisy (viz. Příloha IV). Všechny učebnice používají barevných rámečků k zvýraznění důležitých poznatků. Nakladatelství Prodos použilo pro upoutání pozornosti velmi výraznou žlutou barvu (viz. Příloha III). Shrnutí učiva je ve všech řadách učebnic obvykle provedenou souhrnnými cvičeními, zařazenými obyčejně za jednotlivými kapitolami. Na úplném závěru knihy jsou zpravidla uvedena řešení úloh a cvičení z učebnice nebo některých kapitol.

8.2 Komunikační parametry

Rozsah verbální a grafické složky učebnice charakterizuje komunikační parametry analyzované učebnice. Srovnáním tabulek č. 2, 6, 10 a 14 uvedených v článcích 6.3 – 6.6 shledáváme, že se plošné rozsahy českých učebnic v jednotlivých ročnících hodnotami do velké míry podobají. Nejnižší rozdíl v plošném rozsahu verbální složky je v osmém ročníku mezi učebnicemi autorů prom. pedagoga Trejbala a doc. Odvárky a činí 0,1 %. Naopak nejvyšší je hodnotový rozdíl 14,4 % a to v sedmém ročníku mezi učenicemi RNDr. Molnára a doc. Odvárky. Hodnoty německých učebnic se nesnadno porovnávají z důvodu většího počtu ročníků druhého stupně a tedy i odpovídajících učebnic. Přesto z tabulek hodnot snadno usoudíme, že německé učebnice mají vyšší rozsah verbální složky než jakékoli české. Navíc si ještě všimněme, že nakladatelství Schroedel používá k tisku učebnic menší typ písma než-li česká nakladatelství (viz. Přílohy). Logicky lze usoudit, že grafická složka má v německých učebnicích nižší zastoupení než v učebnicích českých.

Pokud zaměříme pozornost na hodnoty plošného rozsahu kapitol planimetrie, porovnáním zjistíme, že vycházejí již značnější rozdíly hodnot než v rámci celých knih. Když uvažujeme o planimetrii, můžeme považovat grafickou složku za názornější pro výuku. Nejmenší rozdíl 0,2 % je v učebnicích určených pátému ročníku od autorů doc. Odvárky a RNDr. Molnára. Největší rozdíl činí 27,7 % v učebnicích od doc. Odvárky a prom. pedagoga Trejbala pro devátý ročník. Pokud se opět pokusíme o srovnání s německou řadou učebnic, docházíme k závěru, že mají v průměru nižší hodnoty grafických složek planimetrie v učebnicích všech ročníků. Tyto hodnoty klesají úměrně hodnotám zjištěným v českých učebnicích.

8.3 Verbální složka

Další možností měření verbální složky je kromě plošného rozsahu také počet stran. V tomto případě neverbální komponenty zanedbáváme. Sečteme-li počet stran ve všech svazcích jednotlivých sad učebnic (viz. Tab. č. 16), nejvyšší součet je u německé řady. Hned druhý největší rozsah je u učebnic nakladatelství Prometheus. Ovšem pokud si všimneme procentového vyjádření stran věnovaných planimetrii (z celé učebnice), uvidíme, že nakladatelství Schroedel i Prometheus jsou naopak učebnice s nejnižším podílem planimetrie. Nejvyšší hodnota je u učebnice nakladatelství Prodos.

Tab. č. 16: Počet stran celých sad učebnic a kapitol planimetrie

	Prometheus	Prodos	SPN	Schroedel
Celkový počet	1019	588	681	1488
Planimetrie	264	193	203	281
Planimetrie (v %)	25,9	32,8	29,8	18,9

Pokud budeme porovnávat verbální složky vyjádřené počtem slov, dojdeme k závěru, že jednoznačně dominantní postavení mají učebnice SPN - pedagogického nakladatelství (viz. Tab. č. 4, 8, 12), i když nemají nejvyšší počet stran. Počtu slov úměrně odpovídá také počet slov připadajících na jednu vyučovací hodinu. Tato hodnota je pro učebnici devátého ročníku SPN – pedagogické nakladatelství dokonce 2,8krát vyšší než pro učebnici nakladatelství Prodos.

8.4 Shoda s kurikulárními materiály

Analýzou obsahů učebnic bylo zjištěno, že všechny učebnice včetně německých splňují povinné požadavky Vzdělávacího programu Základní škola (viz. Čl. 5.1 – 5.4). Jednotlivé řady se liší způsobem zpracování prezentace učiva a také rozsahem, který věnují planimetrii. Samozřejmě, že autoři uvádějí rozšiřující učivo podle svého uvážení. Pravidlem jsou u českých učebnic v šestém ročníku těžiště a jeho vlastnosti a také souhlasné a střídavé úhly, v sedmém se pečlivě věnují Pythagorově větě a kromě doc. Odvárky také kruhové úseči a výseči, v devátém ročníku se opět pouze doc. Odvárka nezmiňuje o Základech rýsování (viz. Čl. 5.4), ostatní autoři tento alternativní prvek svědomitě zařadily do svých učebnic a RNDr. Molnár dokonce uvádí stejnolehlost. Z výše uvedených důvodů lze usoudit, že nakladatelství Prodos rozvíjí základní učivo planimetrie o rozšiřující učivo nejvíce z analyzovaných učebnic českých nakladatelství.

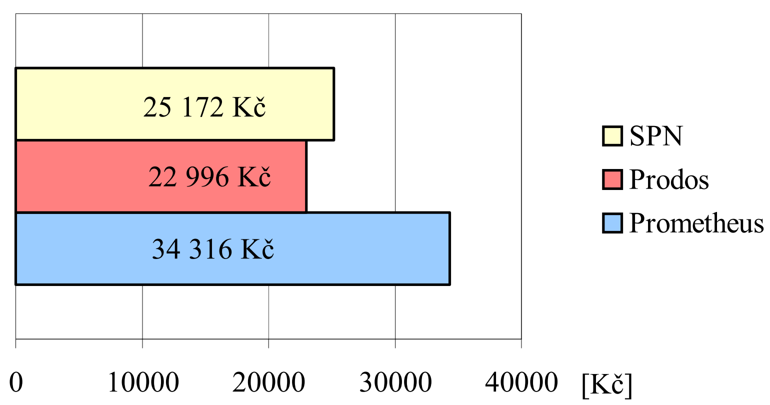
Německé učebnice se zpravidla shodují s českým vzdělávacím programem, ale mnohé rozšiřující učivo zahrnují do učiva povinného. Příkladem je posunutí a otočení v sedmém ročníku. Jiné učivo, jako např. deltoid, zahrnují do složky rozšiřujícího učiva stejně jako české osnovy. Zajímavostí německých učebnic je opakování mnoha tématických celků planimetrie ve dvou po sobě jdoucích ročnících. Např. již v pátém ročníku učebnice uvádějí pojmy shodného zobrazení a osové souměrnosti a činní tak o celý rok dříve než učebnice české. Němečtí žáci tak mají „náskok“ na dětmi z českých škol. Stejné učivo si potom německé děti opakují popřípadě prohlubují v šestém ročníku.

8.5 Finanční náklady

Finanční náklady na studium se zvyšují každým rokem. Z tohoto důvodu shledáváme podstatným porovnat finanční náklady na zabezpečení žáků učebnicemi. V některých případech by se mohla cena učebnic projevit jako rozhodující faktor při obnovování učebních pomůcek ve škole.

V grafu č. 24 jsou uvedeny náklady na učebnice jednotlivých nakladatelství pro jednu třídu třiceti žáků, která absolvuje čtyři roky školní docházky na druhý stupeň a jednoho učitele. Ceny zahrnují všechny dostupné učebnice pro žáky včetně sbírek úloh a včetně příruček pro učitele. Výše cen použitých při výpočtu nákladů byly doporučené nakladatelstvími. Výdaje na německé učebnice nejsou v grafu uvedeny, protože to pro srovnání s českými není považováno za podstatné. Přesto uvádíme orientační cenu jedné knihy 18 Euro podle údajů různých internetových obchodů.

Graf č. 24: Finanční náklady



9. OSOBNÍ NÁZOR

Jako začínající učitel jsem se setkala s některými hodnocenými učebnicemi přímo ve škole a použila jsem je při výuce. Po této analýze jsem schopna hodně údajů o knihách říci, ale nejpodstatnější zkušenost s praktickým použití není ještě stále dostatečná. Jestli opravdu kniha plní svůj účel a zda je napsaná nám vyhovujícím způsobem se dovídáme až v průběhu jejího používání ve škole. Jelikož mám ještě málo praxe a ani jsem neměla dostatek času seznámit se s učebnicemi z tohoto praktického pohledu, konzultovala jsem vlastnosti učebnic s některými zkušenějšími učiteli. Níže uvedené hodnocení se zakládá nejen na uvedeném výzkumu, ale také na mých zkušenostech, vlastním názoru a názorech zmíněných učitelů.

Z osobní zkušenosti mohu hovořit o učebnicích autorů prom. pedagoga Trejbala a doc. Odvárky. V tomto výběru musím jednoznačně upřednostnit práci doc. Odvárky. Jeho učebnice mají vhodnější formát, knihy jsou rozděleny do tří dílů a tudíž pro žáky nepředstavují těžká břemena nošená do školy. Použitá grafika působí kvalitním estetickým dojmem. Další výhodou je snadná orientace v rámci celé učebnice i každé stránky. Uvádí podrobnější a názornější výklad. Způsob pojetí učiva pomáhá začínajícímu učiteli při počátečních krocích, i když nemá k dispozici příručku pro učitele. Podnětné příklady inspirují k tvorbě pomůcek pro zefektivnění výkladu. Negativní stránkou je téměř absence nadstavbového učiva a pro někoho nevhodné tématické členění jednotlivých dílů učebnice.

Učebnice prom. pedagoga Trejbala jsou nepřehledné, již na první pohled působí chaotickým dojmem. Orientace při hodině je v nich značně obtížná pro učitele stejně jako pro žáky. Výklad je nedostatečný a nezkušený učitel může mít problémy připravit se podle těchto učebnic na hodinu či vybrat podstatné učivo ve vhodném sledu obtížnosti. Nutností jsou jiné zdroje příkladů, což prodlužuje dobu přípravy na hodinu a vyžaduje více zkušeností. Naopak rozměrné ilustrace mohou být jedině přínosem pro názorné vyučování.

Z pohledu učitele začátečníka se jeví nejvhodnější učebnice RNDr. Molnára. Učebnice obsahuje na okraji listů metodické poznámky bezprostředně vedle učiva. Další užitečnou pomůckou může být návrh tématického plánu s časovým rozvržením. Je samozřejmostí, že se metodických poznámek ani tématického plánu nemusíme nutně držet, ale můžeme použít jen pro nás vhodné části. Výklad je účelně členěný, což využijeme při přípravě na hodiny. Metodické poznámky podněcují kreativitu učitele a upozorňují na propojení s jinými předměty nebo učivem.

Učebnice určené pro německé žáky jsou obsahově hojně zaplněny. Jejich součástí je výklad ve stručné podobě a určitě by byl oceněn začínajícím učitelem. Vskutku znamenité je grafické pojetí obrázků s důrazem na praktičnost a využití matematiky v životě. Německé učebnice působí chladným, přísným dojmem, ale ilustrace jsou vtipné a nápadité. Zajímavé je opakování některých tématických celků ve dvou po sobě jdoucích ročnících, přičemž v druhém roce je učivo obvykle více prohloubeno.

Planimetrie je ve všech řadách učebnic prezentována v předpokládané míře. Všechny požadované pojmy planimetrie jsou alespoň minimálně zmíněny. Lze se domnívat, že v dostatečném rozsahu. Mnohé výklady jsou autory doplněny o rozšiřující učivo. Jedinou výjimku tvoří učebnice doc. Odvárky, který uvádí rozšiřující učivo v minimálním rozsahu. Přesto jsem přesvědčena, že všichni autoři prezentují planimetrii jako rovnocenný celek matematiky.

ZÁVĚR

„Nemilovat knihy znamená nemilovat moudrost. Nemilovat moudrost však znamená stávat se hlupákem.“

J. A. Komenský

10. ZÁVĚR

Cílem práce bylo porovnání učebnic matematiky pro druhý stupeň základní školy z hlediska jejich formální a obsahové stránky. Základním východiskem byla aplikace kvantitativní metody a metody obsahové analýzy na řady učebnic vydaných různými nakladatelstvími. V rámci rozšíření pohledu na didaktické texty byla komparace obohacena o zahraniční učebnice. Spolupráce libereckých základních škol s blízkými školami v Německu, byla důvodem volby právě německých učebnic. Pro důkladnější analýzu bylo nutno vymezit oblast matematiky, která udá zaměření celé práce. Byla vybrána planimetrie, protože není pro mnohé žáky ani učitele oblíbenou částí učiva a často bývá omezováno ve prospěch ostatního učiva. Tato analýza měla za úkol ověřit, zda je planimetrie prezentována v učebnicích v předepsaném rozsahu, nebo jestli i samotní autoři výklad planimetrie minimalizují.

Předpokladem úspěšně provedeného hodnocení byla částečná zkušenost začínajícího učitele s vybranými tituly. Učebnice je podstatným prostředkem komunikace mezi učitelem a žákem, proto je důležité, aby správně plnila všechny požadované funkce. Jako budoucí učitelka budu situací nucena analyzovat různé učebnice a vyvodit závěry z nashromážděných údajů. Prací na výzkumu jsem získala praktické zkušenosti s aplikací na učebnice matematiky. A navíc jsme měla možnost se před vstupem do praxe poměrně detailně seznámit se strukturou a obsahem vybraných učebnic.

Závěrem práce není doporučení jedné z posuzovaných řady učebnic jako univerzální a jedinečné pro výuku matematiky na základní škole, ale předložení objektivních výsledků metod zkoumání. V konečném hodnocení byla sesbíraná data porovnána a u každé řady učebnic byly zdůrazněny její přednosti stejně jako byly zmíněny její méně vydařené vlastnosti. Tyto výsledky je možno využít při tvorbě nových učebnic a didaktických textů. Dále při hledání vhodné pomůcky pro výuku a v budoucnu, pokud dojde k dalšímu hodnocení nových učebnic aplikací stejných metod, bude možné porovnání stavu a vývoje tvorby českých učebnic matematiky.

11. SEZNAM LITERATURY

[1] Květoň, Burian, Šimon: *Kapitoly z didaktiky matematiky III.* Pedagogická fakulta v Ostravě. Ostrava, 1990. s. 319. ISBN 80-7042-021-9

[2] Nikl, J.: *Didaktické aspekty technických výukových prostředků.* TU v Liberci. Liberec, 2002. s.63. ISBN 80-7083-635-0

[3] Průcha, J.: *Studijní příručka - Teorie, tvorba a hodnocení učebnic.* ÚÚVPP. Praha, 1989. s. 118.

[4] Průcha, J.: *Učebnice: Teorie a analýzy edukačního média.* Příručka pro studenty, učitele, autory učebnic a výzkumné pracovníky. Paido. Brno, 1998. s. 148. ISBN 80-85931-49-4

[5] Průcha, Walterová, Mareš: *Pedagogický slovník.* Portál. Praha, 2001. s. 328. ISBN 80-7178-579-2

[6] Přívratská, J.: *Planimetrie (opakování).* TU v Liberci. Liberec, 2002. s. 44. ISBN 55-089-02

[7] Vyšín, J. a kol.: *Planimetrie I. díl.* SPN. Praha, 1962. s.264. ISBN 17-136-62

[8] Vyšín, J. a kol.: *Planimetrie II. díl.* SPN. Praha, 1964. s.230. ISBN 17-108-64

[9] Vzdělávací program Základní škola. Platnost od 1. 9. 1996. s. 280. ISBN 80-7168-337-X

Seznam pramenů:

[10] Griesel, H.:

a) *Mathematik Heute, 5. Schuljahr.* Schroedel. Hannover, 2001. s. 272.

b) *Mathematik Heute, 6. Schuljahr.* Schroedel. Hannover, 2002. s. 256.

c) *Mathematik Heute, 7. Schuljahr.* Schroedel. Hannover, 1999. s. 248.

d) *Mathematik Heute, 8. Schuljahr.* Schroedel. Hannover, 1999. s. 240.

e) *Mathematik Heute, 9. Schuljahr.* Schroedel. Hannover, 2003. s. 248.

f) *Mathematik Heute, 10. Schuljahr.* Schroedel. Hannover, 2002. s. 240.

[11] Odvárko, Kadleček:

a) *Matematika pro 6. ročník, 1. až 3. díl.* Prometheus. Praha, 1997. s. 256.

b) *Matematika pro 7. ročník, 1. až 3. díl.* Prometheus. Praha, 1997. s. 259.

c) *Matematika pro 8. ročník, 1. až 3. díl.* Prometheus. Praha, 2000. s. 245.

d) *Matematika pro 9. ročník, 1. až 3. díl.* Prometheus. Praha, 2001. s. 259.

[12] Molnár, J.:

a) *Matematika 6 – učebnice s komentářem pro učitele.*
Prodos. Olomouc, 1998. s. 143.

b) *Matematika 7 – učebnice s komentářem pro učitele.*
Prodos. Olomouc, 1999. s. 159.

c) *Matematika 8 – učebnice s komentářem pro učitele.*
Prodos. Olomouc, 2000. s. 159.

d) *Matematika 9 – učebnice s komentářem pro učitele.*
Prodos. Olomouc, 2001. s. 127.

[13] Trejbal, J.:

a) *Matematika pro 6. ročník – 1. a 2. díl.*
SPN – pedagogické nakl.,a. s. Praha, 1998. s. 168.

b) *Matematika pro 7. ročník – 1. a 2. díl.*
SPN – pedagogické nakl.,a. s. Praha, 1999. s. 174.

c) *Matematika pro 8. ročník – 1. a 2. díl.*
SPN – pedagogické nakl.,a. s. Praha, 2000. s. 166.

d) *Matematika pro 9. ročník – 1. a 2. díl.*
SPN – pedagogické nakl.,a. s. Praha, 1999. s. 173.

PŘÍLOHY

SEZNAM PŘÍLOH:

Příloha I: Odvárko, O.: *Kopie kapitoly Osová souměrnost. Matematika pro 6. ročník, 3. díl (s. 23 – 32).*

Příloha II: Trejbal, J.: *Kopie kapitoly Osová souměrnost. Matematika pro 6. ročník, 2. díl (s. 7 – 24).*

Příloha III: Molnár, J.: *Kopie kapitoly Osová souměrnost. Matematika 6 – učebnice s komentářem pro učitele (s. 19 – 34).*

Příloha IV: Griesel, H.: *Kopie kapitoly Osová souměrnost. Mathematik Heute, 6. Schuljahr (s. 166 – 172).*

PŘÍLOHA I

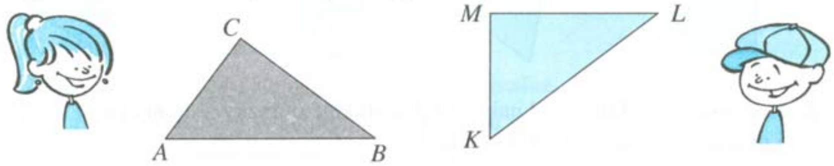
2 OSOVÁ SOUMĚRNOST

2.1 Shodné útvary

A Čendův strýc pěstuje víno. Čenda mu pomáhá vymalovat sklípek. Pomocí šablony s dírami maluje řadu stejných hroznů vína.

Které hrozny nejsou shodné s hroznem na šabloně? Proč?

B Pepa s Aničkou zkoumají, zda jsou trojúhelníky *ABC* a *KLM* shodné.

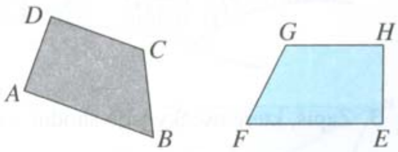


„Vystřihnu oba trojúhelníky a přiložím je k sobě. Když se budou přesně krýt, jsou shodné," povídá Pepa.

„To by šlo," říká Anička. „Ale tím zničíme celou stránku. Já si vezmu průhlednou fólii a obkreslím na ni trojúhelník *ABC*. Pak fólii položím na trojúhelník *KLM*. Když se bude obkreslený trojúhelník krýt s trojúhelníkem *KLM*, jsou trojúhelníky *ABC* a *KLM* shodné."

Zkus to také jako Anička. Jestli nemáš fólii, použij průsvitný papír.

C Ověř, že čtyřúhelníky *ABCD* a *EFGH* jsou shodné.



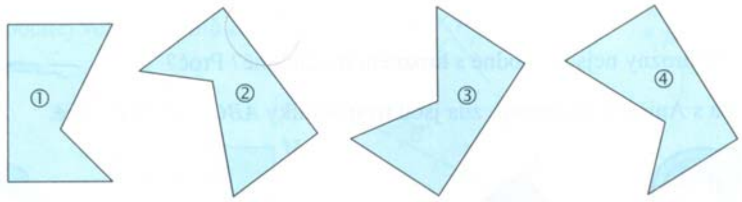
Někdy nestačí s průsvitkou jen posouvat po papíře, ale musíme ji zvednout a položit spodní stranou nahoru.

D Zjisti, které z čar na obrázcích 2, 3, 4 jsou shodné s čárou na obrázku 1.

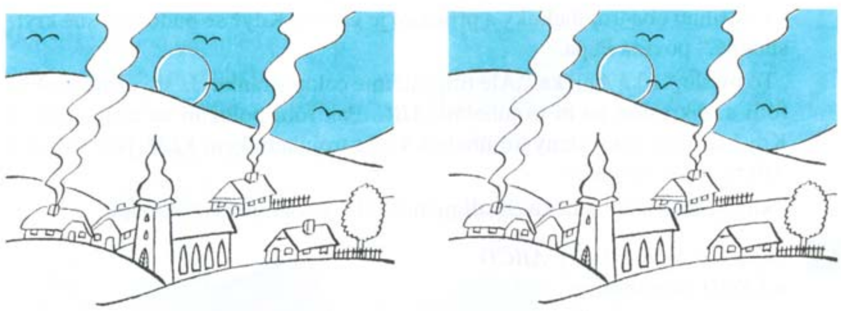
SHODNÉ ÚTVARY
jsou takové útvary, které se po přemístění kryjí.

Cvičení

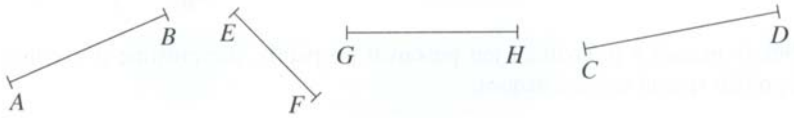
1. Ověř pomocí průsvitky, které z útvarů 2, 3, 4 jsou shodné s útvarem 1.



2. *Máš postřeh?* Malíř chtěl nakreslit dva shodné obrázky. Ale my jsme v nich našli 5 drobných rozdílů. Najdeš je také?

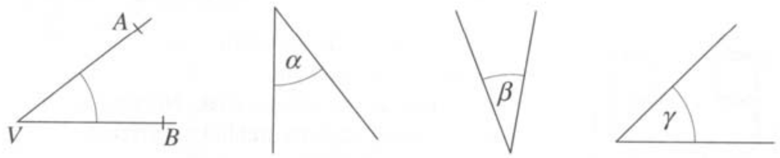


3. Zapiš, které úsečky jsou shodné s úsečkou *AB*:



Když mají úsečky stejnou délku, jsou shodné.

4. Zapiš, které úhly na obrázku jsou shodné s úhlem *AVB*:



Když mají úhly stejnou velikost, jsou shodné.

5. *Pro přemýšlivé.* Rozhodni, zda platí (piš *ano – ne*):

a) Každé dvě kružnice se stejným poloměrem jsou shodné.

b) Každé dvě kružnice jsou shodné.

c) Každé dva čtverce jsou shodné.

d) Každé dva čtverce se stejnými obvody jsou shodné.

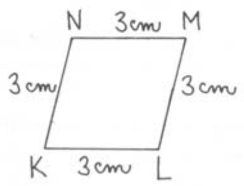
e) Každé dva obdélníky se stejnými obvody jsou shodné.

f) Každé dva pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné.

6. *Pepa vymýšlí.* „Tady mám čtyřúhelník *KLMN*. Je jasné, že každý jiný čtyřúhelník, který má všechny strany dlouhé 3 cm, je shodný s *KLMN*.“

Má Pepa pravdu?

Jak ho přesvědčíš, že se mýlí?



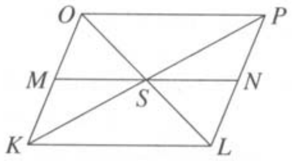
7. Rozhodni, zda jsou shodné obrazce:

a) *KLP* a *POK*

b) *OMNP* a *MKLN*

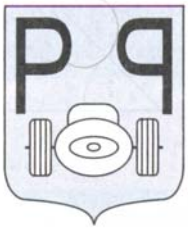
c) *KLS* a *LNS*

Napovíme: Můžeš použít průsvitku.



2.2 Osová souměrnost

A *Anička kreslí* pro malou Adélku velkého barevného motýla. Aby měl obě křídla stejná, nakreslila jedno, pak přeložila papír a propichováním jehlou si naznačila druhé křídlo.



Pepův znak. Pepa bude slavným automobilovým závodníkem.
Na svém autě bude mít vlastní znak. Náčrtek už má. Teď si chce nakreslit velký znak na překližku, vyříznout ho a pověsit v pokoji na zeď.

Jak to má udělat, když chce mít obě poloviny znaku stejné a překližku nemůže přeložit?

B Pamatuješ si, co je to střed úsečky? Budeme ho potřebovat v další úloze.

A_0 je STŘED ÚSEČKY AA'.

Platí:

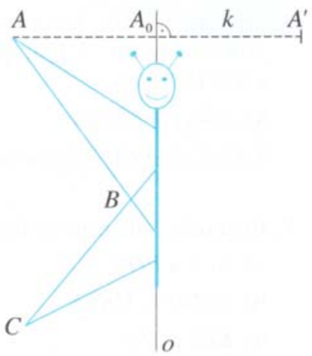
$$|AA_0| = |A_0A'|$$

A_0 čti *á nula*, A' čti *á s čárkou.*

C *Dokreslíš motýla?* Zkusíme nakreslit druhé křídlo motýla bez překládání papíru, bez jehly i bez průsvitky.

Nejprve si přečti a prohlédni, jak najdeme k bodu A bod A':

1. Sestrojíme bodem A kolmici k k přímce o.
2. Průsečík přímek k a o označíme A_0.
3. Na přímce k sestrojíme bod A' tak, aby bod A_0 byl středem úsečky AA' (kružítkem nebo měřítkem).



A teď začni pracovat:

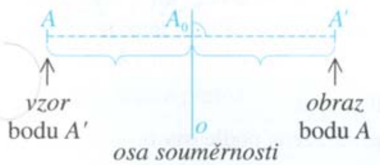
* narýsuj podobný obrázek poloviny motýla do sešitu,
* najdi k bodům A, B a C body A', B' a C',
* narýsuj druhé křídlo motýla.

Přesvědč se pomocí průsvitky, že jsou obě křídla tvého motýla shodná.

Motýl je *osově souměrný.*

Druhé křídlo jsme sestrojili jako OBRAZ prvního křídla v *osové souměrnosti s osou o.*

OSOVÁ SOUMĚRNOST



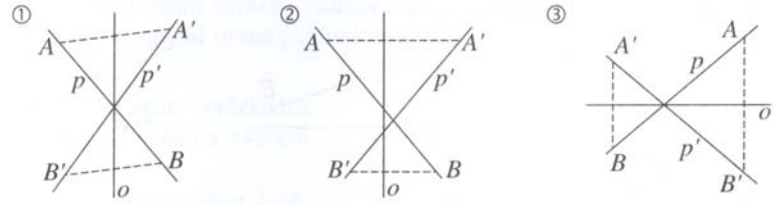
Přímka AA' je kolmá k ose o:

$$AA' \perp o$$

Bod A_0 je střed úsečky AA':

$$|AA_0| = |A_0A'|$$

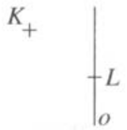
D *Najdi chyby.* Děti rýsovaly obraz p' přímky p v osové souměrnosti s osou o. Sestrojily obrazy A', B' bodů A, B a pak narýsovaly přímku p' jako obraz přímky p. Tři řešení vidíš na obrázcích. Ale ani jedno z nich není úplně v pořádku.



a) Vysvětli, kde jsou na obrázcích chyby.

b) Narýsuj si do sešitu přímky p a o a pak sestroj správně přímku p'.

E Načrtni si podobný obrázek do sešitu. Sestroj k bodům K, L jejich obrazy v osové souměrnosti s osou o.



Obrázky do sešitu kresli větší!

SAMODRUŽNÉ BODY

Bod C je *samodružný.*

$$C = C'$$

Vzor *splývá* s obrazem.

Každý bod osy o je samodružný.

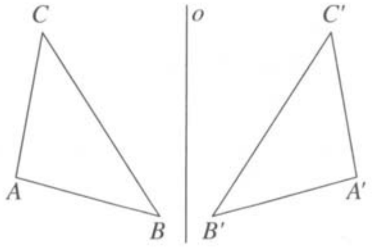
F *Rozhodni!*

a) Který bod je obrazem bodu A v osové souměrnosti s osou o?

b) Který bod je obrazem bodu A'?

c) Který trojúhelník je obrazem trojúhelníku ABC?

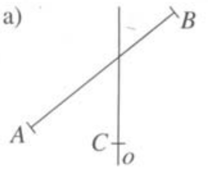
d) Který trojúhelník je obrazem trojúhelníku $A'B'C'$?

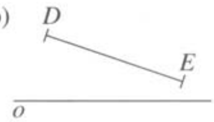


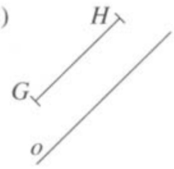
Body A a A' jsou *souměrně sdružené* podle osy o.
Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou *souměrně sdružené* podle osy o.

Cvičení

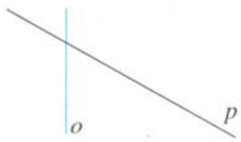
1. Narýsuj podobné (ale větší) obrázky do sešitu. Sestroj obrazy vyznačených bodů a úseček v osové souměrnosti s osou o.

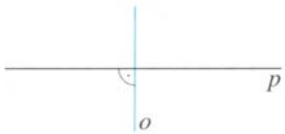
a)


b)


c)


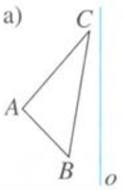
2. Narýsuj podobné obrázky do sešitu. Sestroj obraz přímky p v osové souměrnosti s osou o.

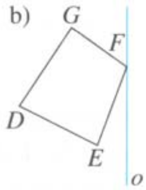
a)


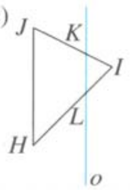
b)


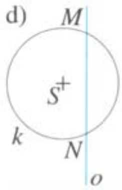
Napovíme: Zvol si na přímce dva body.

3. Narýsuj podobné (větší) obrázky do sešitu a doplň obrazy trojúhelníku ABC, čtyřúhelníku $DEFG$, trojúhelníku JIH a kružnice k v osové souměrnosti s osou o.

a)


b)


c)


d)


Geometrický útvar a jeho *obraz* v osové souměrnosti jsou shodné.

4. Na obrázcích z předcházejícího cvičení najdi a vyjmenuj ty vyznačené body, které jsou samodružné v osové souměrnosti s osou o.

5. Překlad slov z jazyka AHAH není obtížný. Za slovem nebo větou v tomto jazyce nakreslíš svislou přímku o a sestrojíš jejich obraz v osové souměrnosti s osou o. Čárky a háčky musíš doplnit.

Přepiš do sešitu a přelož:

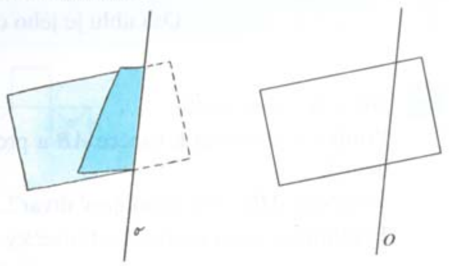
	A	B
a)	AHUT	OMIM
b)	TIMAMYV	TITYMYV
c)	.IV MOT O ATAT o	.ATOMU OT AMAM o

6. Do reklamního letáku na papírnické potřeby chce výtvarník nakreslit přeložený list papíru. Na prvním obrázku vidíš, že se mu to moc nedaří. Papír „přeložil“ podle přímky o, spodní stranu papíru kreslí barevně.

Dokážeš to lépe?

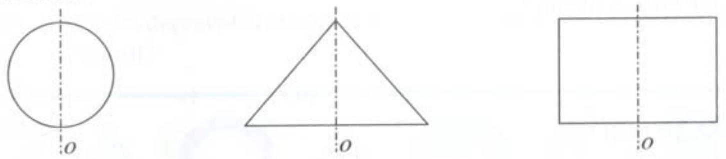
Překresli si z druhého obrázku list s přímkou o do sešitu a nakresli správné přeložení.

Napovíme: Otočená část bude souměrně sdružená podle osy o s překládanou částí.



2.3 Osově souměrné útvary

A Čenda se nabídl, že sestrojí obrazy narýsované kružnice, trojúhelníku a obdélníku v osové souměrnosti s osou o, když si bude moci osu o sám zvolit. Byl podezřele rychle hotov.

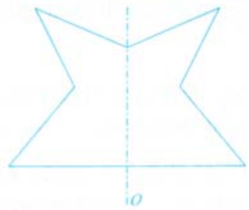


„A kde jsou ty obrazy?“ ptá se Pepa.

„Obrazy jsou stejné jako vzory. Už nemusím udělat ani čárku.“

Má Čenda pravdu?

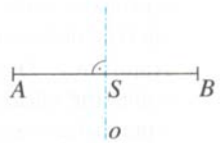
OSOVĚ SOUMĚRNÝ ÚTVAR
se dá rozdělit přímkou o na dvě shodné části, pro které platí:
Když překlopíme jednu část podle této přímky, kryje se s druhou částí.
Přímka o je *osa souměrnosti* osově souměrného útvaru.



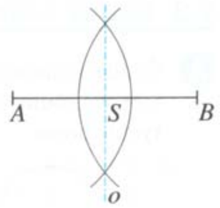
B Je úhel osově souměrný útvar?
Najdeš vždycky jeho osu souměrnosti?
Která je to přímka?

Osa úhlu je jeho osou souměrnosti.

C *Dívej se na obrázek*!
Přímka o je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem S.
Je úsečka AB osově souměrný útvar?
Je přímka o osou souměrnosti úsečky AB?



D Vysvětli podle obrázku, jakým postupem narýsujeme osu souměrnosti úsečky AB.
Průsečík S osy o s úsečkou AB má zajímavou vlastnost. Víš jakou?
Jak bodu S říkáme?



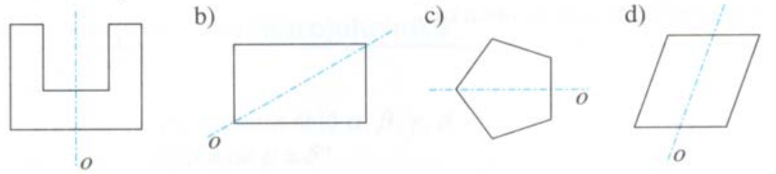
OSA ÚSEČKY

prochází středem úsečky a je k této úsečce kolmá.

Cvičení

1. Rozhodni, zda je útvar na obrázku souměrný podle zakreslené osy (piš *ano – ne*):

a) b) c) d)

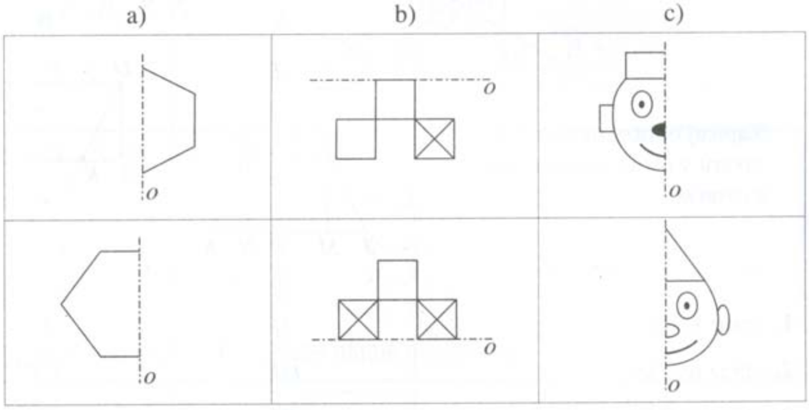


2. Překresli obrázek do sešitu a doplň ho tak, aby byl osově souměrný podle vyznačené osy.

a) b) c)

A

B



3. Načrtni obrazec a vyznač všechny jeho osy souměrnosti. Zapiš, kolik jich je:

a) čtverec b) obdélník

c) trojúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé (*rovnostranný trojúhelník*)

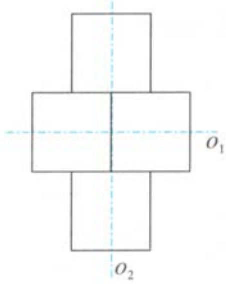
4. Kolik os souměrnosti má kružnice? Kterým bodem všechny procházejí?

5. Na obrázku je sedm dopravních značek. Které z nich jsou osově souměrné a kolik mají os souměrnosti?

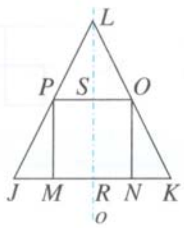
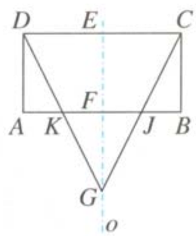
a) b) c) d) e) f) g)

Znáš všechny tyto značky? Co znamenají?

6. Vytvářej ze čtyř shodných čtverců útvary, které jsou osově souměrné. Vyznačuj všechny jejich osy souměrnosti.
Jednu možnost vidíš na obrázku.



2.4 Úlohy na závěr

	A	B
Zapisuj obrazy uvedených útvarů v osové souměrnosti s osou o:		
1. obraz bodu	M	K
2. obraz úsečky	OK	CJ
3. obraz úsečky	PS	DE
4. obraz trojúhelníku	JMP	AKD
5. obraz obdélníku	$RNOS$	$FBCE$
6. obraz čtyřúhelníku	$SPJR$	$EDKF$

7. Vypiš z obrázku všechny trojúhelníky a čtyřúhelníky, které jsou osově souměrné.

∗ Prohlédni si svoji fotografii nebo svůj obraz v zrcadle.
Máš osově souměrný obličej?

I nesouměrnosti oku lahodí.

PŘÍLOHA II

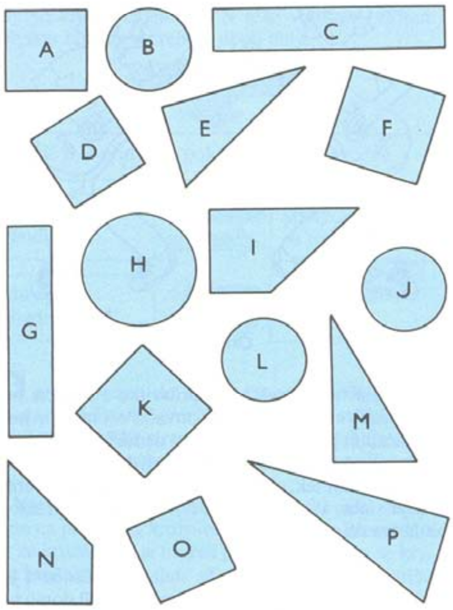
4 Osová souměrnost

4.1 Shodnost geometrických útvarů

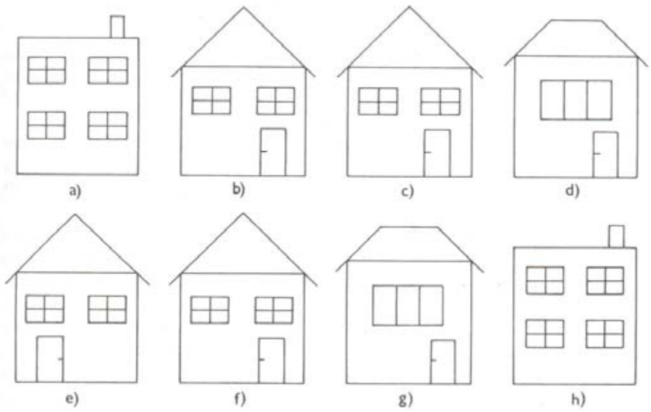
V životě kolem nás nalézáme obrázky nebo předměty, které mají stejný tvar a stejnou velikost. Fotografie na titulních stránkách všech výtisků jednoho čísla časopisu (například Bravo) mají stejný tvar i stejnou velikost. Všechny listy téže učebnice mají stejný tvar a stejnou velikost, všechny diskety do počítače, kompaktní disky nebo magnetofonové kazety mají stejný tvar a stejnou velikost. Totéž se týká stejných stolů, židlí, lahví, květináčů, tužek apod. Nebereme přitom v úvahu jejich barvu nebo nápisy na nich. V praxi hovoříme o stejných předmětech, v matematice budeme hovořit o **shodných rovinných nebo prostorových útvarech.**

1 Z kreseb průčelí osmi rodinných domků na obr. 1 vyberte ta průčelí, která mají stejný tvar i stejnou velikost. Zdůvodněte svůj výběr.

2 Na obr. 2 jsou různé geometrické obrazce. Které z nich mají stejný tvar i stejnou velikost?



Obr. 2

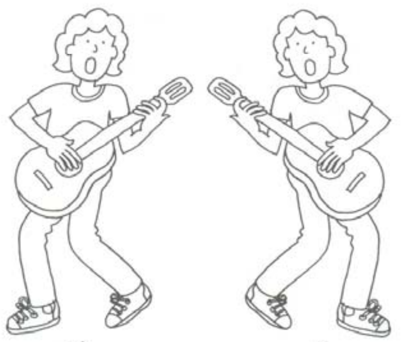


Obr. 1

Jak poznáte, jestli jsou dva obrazce shodné? Jeden z nich překreslete na průsvitku a přiložte ho na druhý. Jestliže se oba obrazce po přemístění kryjí, řekneme, že mají stejný tvar i stejnou velikost. V matematice řekneme, že obrazce jsou **shodné**.

3 Pomocí průsvitky zkontrolujte správnost svých řešení příkladů **1** a **2**.

4 Na obr. 3 jsou dvě kresby kytaristy.



a) b)

Obr. 3

1. Překreslete obrázek b) na průsvitku a označte ho c). Obrázek c) budeme přemísťovat. Posouváním nebo otáčením průsvitky po papíru nemůžeme přemístit obr. c) tak, aby se kryl s obr. a). Kdykoliv ho však můžeme vrátit tak, aby se kryl s obr. b). Má-li se obr. c) krýt s obr. a), musíme průsvitku nejdříve překlopit lícem na rub.

Ověřte pomocí průsvitky, že stejným způsobem je možné dosáhnout toho, aby se kryla průčelí domů b) a e) na obr. 1.

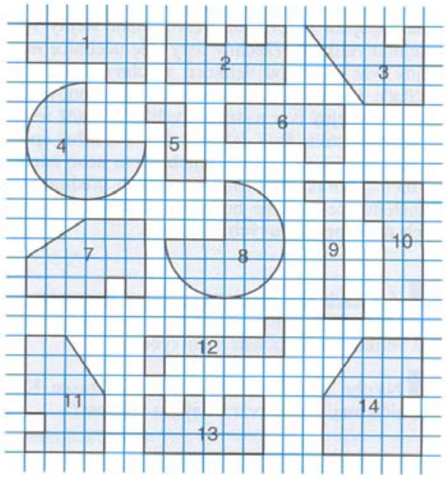
Nemusíme-li překlopit průsvitku, hovoříme o **přímo shodných** obrazcích. Jestliže se obrazce kryjí pouze tehdy, když průsvitku překlopíme, hovoříme o **nepřímo shodných** obrazcích.

ZAPAMATUJTE SI

Říkáme, že dva obrazce v rovině jsou **shodné**, jestliže je lze přemístit tak, aby se kryly.
Obrazce, které se kryjí po přemístění bez překlopení lícem na rub, nazýváme **přímo shodné**.
Obrazce, které se kryjí pouze po přemístění spojeném s překlopením lícem na rub, nazýváme **nepřímo shodné**.

Rozhodovat o shodnosti obrazců pomocí průsvitky můžeme jenom u rovinných obrazců. Kolem nás je mnoho shodných prostorových útvarů, například kazety do magnetofonu nebo videa, učebnice matematiky pro 6. ročník z jednoho nakladatelství, židle stejného typu, automobily Felicie stejného typu, rodinné domky stejného typu aj. Kdyby nebyly všechny osobní automobily Felicie shodné, nemohli bychom vyměňovat vadné součástky za náhradní. O jejich shodnosti přitom nemůžeme rozhodovat pomocí průsvitky. Nemůžeme přemístit dva automobily tak, aby se kryly. O shodnosti prostorových útvarů (například vyrobených součástek automobilů) se lze přesvědčit měřením.

5 Na obr. 4 jsou na čtverečkovaném papíru narýsovány různé obrazce. Pomocí průsvitky z nich vyberte obrazce, které jsou
a) přímo shodné,
b) nepřímo shodné.

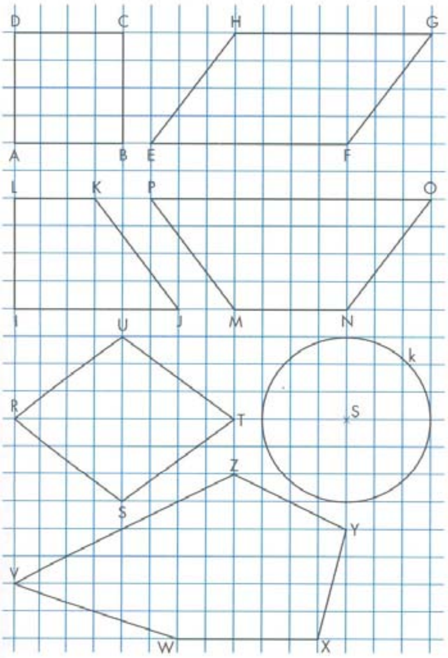


Obr. 4

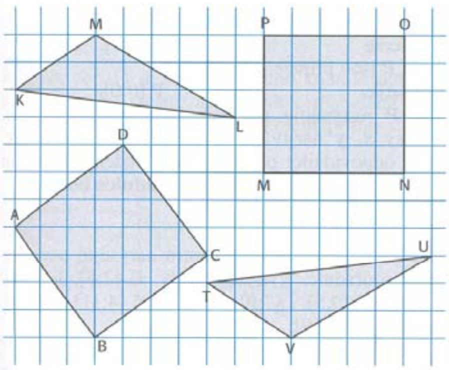
6 **1.** Na obr. 5 jsou na čtverečkovaném papíru narýsovány různé obrazce. Na čtverečkovaný papír narýsujte obrazce s nimi shodné.

2. Ověřte, že trojúhelník KLM na obr. 6 je nepřímo shodný s trojúhelníkem TUV, a že čtverec ABCD na témže obrázku je přímo shodný se čtvercem MNOP.

7 a) Narýsujte do sešitu přímku **p** a na průsvitku přímku **q**. Můžete přemístit přímku **q** tak, aby se kryla s přímkou **p**?
b) Narýsujte do sešitu polopřímku AB a na průsvitku polopřímku CD. Můžete přemístit polopřímku AB tak, aby se kryla s polopřímkou CD?
c) Narýsujte do sešitu úsečku XY, která má délku 5,6 cm. Na průsvitku narýsujte úsečku UV, která má



Obr. 5



Obr. 6

délku 5,6 cm. Můžete přemístit úsečku XY tak, aby se kryla s úsečkou UV?
d) Narýsujte do sešitu úhel MVN, který má velikost 45°. Na průsvitku narýsujte úhel XUY, který má také velikost 45°. Můžete přemístit úhel XUY tak, aby se kryl s úhlem MVN?

Řešení
a) Každou přímku můžeme přemístit tak, aby se kryla s jinou přímkou, tedy i přímku **q** můžeme přemístit tak, aby se kryla s přímkou **p**. Říkáme potom, že dvě přímky spolu splývají. Přemýšlejte o tvrzení: Jestliže dvě přímky spolu splývají, mohu jednu posunovat po druhé.
Zapište výsledky svých úvah a společně si o nich popovídejte se svým učitelem.
b) Každou polopřímku můžeme přemístit tak, aby se kryla s jinou polopřímkou. Přitom splynou počátky obou polopřímek i všechny jejich další body. Polopřímku AB lze tedy přemístit tak, aby se kryla s polopřímkou CD.
c) Úsečku XY délky 5,6 cm snadno přemístíme tak, aby splynula s jinou úsečkou UV téže délky.
d) Úhel XUY velikosti 45° snadno přemístíme tak, aby se kryl s úhlem MVN téže velikosti. Přitom splynou ramena a vrcholy obou úhlů.

ZAPAMATUJTE SI

Každé dvě přímky a polopřímky jsou shodné.

úsečky jsou shodné ⇔ délky úseček se rovnají

úhly jsou shodné ⇔ velikosti úhlů se rovnají

8 a) Narýsujte do sešitu čtverec EFGH, jehož strana má délku 4,2 cm. Narýsujte na průsvitku čtverec KLMN, jehož strana má také délku 4,2 cm. Přesvědčte se, že čtverec KLMN můžeme přemístit tak, aby se kryl se čtvercem EFGH.
b) Narýsujte do sešitu kružnici **k** (S; 30 mm). Narýsujte na průsvitku kružnici **m** (R; 3 cm). Přesvědčte se, že kružnici **m** je možné přemístit tak, aby se kryla s kružnicí **k**.

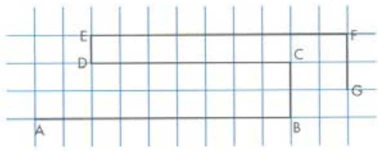
ZAPAMATUJTE SI

čtverce jsou shodné ⇔ délky stran čtverců se rovnají

kružnice jsou shodné ⇔ poloměry kružnic se rovnají

9 Na čtverečkovaném papíru na obr. 7 je narýsována lomená čára ABCDEFG. Narýsujte ji na volný list čtverečkovaného papíru.
1. Narýsujte červeně jinou lomenou čáru $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1$, která je s ní přímo shodná tak, aby úsečka A_1B_1 byla rovnoběžná s úsečkou AB.
2. Narýsujte modře jinou lomenou čáru $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2$, která je s lomenou čárou

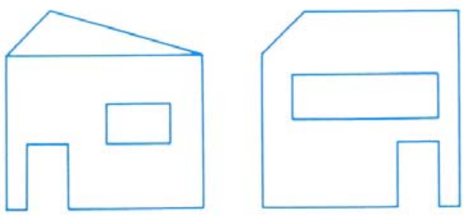
ABCDEFG přímo shodná tak, aby úsečka A_2B_2 byla kolmá na úsečku AB.



Obr. 7

3. Narýsujte zeleně jinou lomenou čáru $A_3B_3C_3D_3E_3F_3G_3$, která je s lomenou čárou ABCDEFG nepřímo shodná tak, aby úsečka A_3B_3 splývala s úsečkou AB. (Uvědomte si, že v nepřímé shodnosti překlápíme rovinu, ve které leží lomená čára ABCDEFG.)

10 Na obr. 8 jsou kresby dvou domečků se šikmou střechou a jedním oknem. Překreslete je na průsvitku a potom nakreslete do sešitu domečky:



Obr. 8

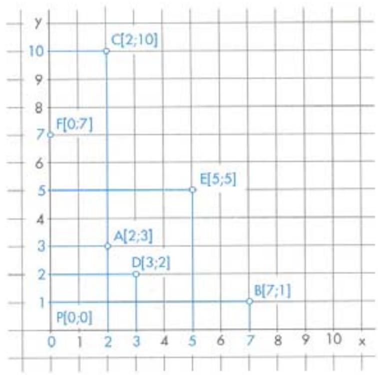
a) přímo shodné s domečky na obr. 8,
b) nepřímo shodné s domečky na obr. 8.
(Potřebné body překopírujte na stránky svých sešitů pomocí vpichů do průsvitky).

Shodností geometrických útvarů se budeme zabývat také v **soustavě souřadnic**. Připomeňme si postup, který jste se naučili v předcházejícím ročníku.

Narýsujte na čtverečkovaném papíru dvě navzájem kolmé přímky **x**, **y**. Na každé z nich vyznačte číselnou osu jako na obr. 9. Jako jednotku zvolte 1 cm (což je délka strany jednoho nebo dvou čtverečků podle typu čtverečkovaného papíru). Každému bodu přiřaďte dvě čísla, která odpovídají patám kolmic vedených z tohoto bodu na přímky **x**, **y**. (Patou kolmice nazýváme průsečík přímky a k ní sestrojené kolmice). Bodu **A** je přiřazeno číslo 2 na ose **x** a číslo 3 na ose **y**.

Zapíšeme A [2;3].
Čteme: „Bod A má x-ovou souřadnici rovnou 2 a y-ovou souřadnici rovnou 3."

Bodu **B** je přiřazeno číslo 7 na ose **x** a číslo 1 na ose **y**.



Obr. 9

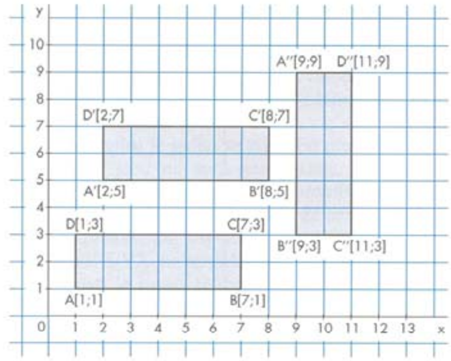
Zapíšeme B [7;1].
Bodu **C** jsou přiřazena čísla 2 a 10.
Zapíšeme C [2;10].
Bodu **D** jsou přiřazena čísla 3 a 2.
Zapíšeme D [3;2].
Pozor! Bod **D** je různý od bodu **A**. Záleží na pořadí čísel.
Bodu **E** jsou přiřazena čísla 5 a 5.
Zapíšeme E [5;5].
Bodu **F** jsou přiřazena čísla 0 a 7.
Zapíšeme F [0;7].
Bodu **P** jsou přiřazena 0 a 0.
Zapíšeme P [0;0].
Bod **P** nazýváme **počátek soustavy souřadnic.** Přímky **x**, **y** nazýváme **osy soustavy souřadnic**. Čísla odpovídající patám kolmic vedených bodem **A** na přímky **x**, **y** nazýváme **souřadnice bodu A**.

11 Na čtverečkovaném papíru narýsujte osy soustavy souřadnic. Vyznačte body: E [2;5], F [5;2], G [1;1], H [0;5], I [7;0], J [12;3], K [4;11], L [1;9], M [10;1], N [9;9].

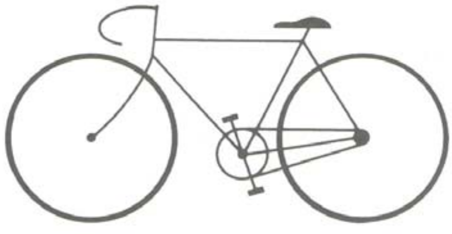
12 **1.** Obdélník ABCD v soustavě souřadnic na obr. 10 má vrcholy A [1;1], B [7;1], C [7;3], D [1;3]. Přerýsujte ho na průsvitku a přemístěním průsvitky najděte na čtverečkovaném papíru libovolné obdélníky A'B'C'D' a A"B"C"D" shodné s obdélníkem ABCD tak, aby jejich strany ležely v linkách čtverečkovaného papíru. Určete souřadnice bodů A', B', C', D' a A", B", C", D".

Řešení
Na obr. 10 jsou dvě možná řešení, a to obdélníky A'B'C'D' a A"B"C"D".

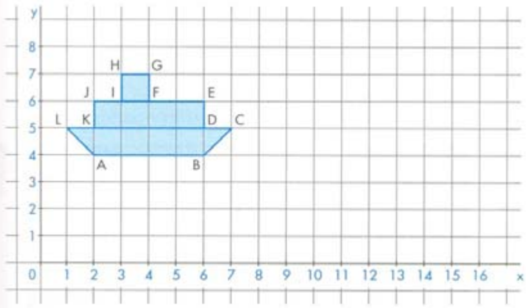
2. Najděte dvě další řešení příkladu **12** **1.**



Obr. 10

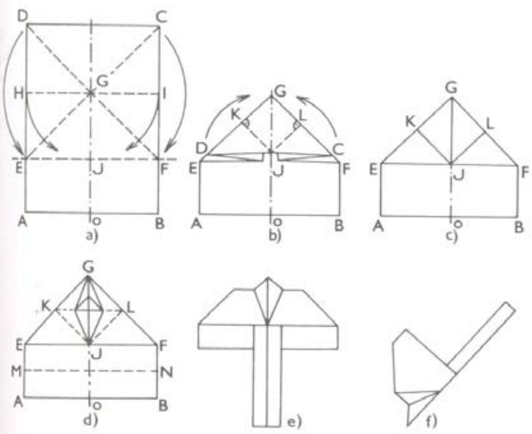


Obr. 11



Obr. 12

13 Na obr. 11 je kresba jízdního kola. Překreslete kolo do svých sešitů a nakreslete dvě další kola, z nichž jedno bude s daným kolem přímo shodné a druhé nepřímo shodné.



Obr. 13

14 V soustavě souřadnic na obr. 12 jsou vyznačeny body A [2;4], B [6;4], C [7;5], D [6;5], E [6;6], F [4;6], G [4;7], H [3;7], I [3;6], J [2;6], K [2;5], L [1;5]. Vhodným spojením těchto bodů vznikl obraz parníku. Najděte souřadnice všech bodů, které parník určují, jestliže

a) parník „odpluje" o 9 jednotek doprava,
b) parník „se potopí" z původního místa o 4 jednotky svisle dolů,
c) parník „odpluje" z původního místa o 6 jednotek doprava a „potopí se" o 3 jednotky svisle dolů.

4.2 Osová souměrnost a její vlastnosti

1 **1.** Narýsujte úsečku AB délky 6,8 cm a sestrojte její osu.
2. Narýsujte úhel UVX velikosti 70° a sestrojte jeho osu.

2 Podle obr. 13 složte vlaštovku z obdélníkového papíru, nejlépe z velkého sešitu.

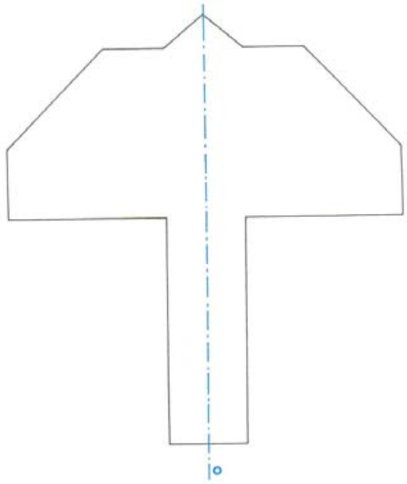
Návod

*– Papír přehněte podél přímky **o** (obr. 13a). Stranu CD přiložte postupně ke stranám AD a BC a papír vždy znovu rozložte. Dále přehněte papír tak, aby přehyb vyznačený úsečkou HI procházel bodem G a byl rovnoběžný se stranou CD. Body H, I potom vtlačte směrem k bodu J a sklopte vrcholy C, D (obr. 13b). Bod C splyne s bodem F a bod D s bodem E. Průsečík přímek **o** a EF je označen J.*

– Vzniklé cípy přeložte tak, aby body C, D splynuly s bodem G. Strany KJ a LJ přiložte ke straně GJ a podle nákresu dokončete „zobák" vlaštovky. Odstřihněte obdélník ABNM, vytvořte z něj „ocas" vlaštovky, po-

délně ho v polovině přeložte a zasuňte jej do jejího křídla podle nákresu 13e).

3 Překreslete obrys vlaštovky z obr. 14 na průsvitný papír a vystřihněte ho. Přeložte ho podle modře vyznačené přímky **o** a přesvědčte se, že se obě poloviny obrysu vlaštovky kryjí.

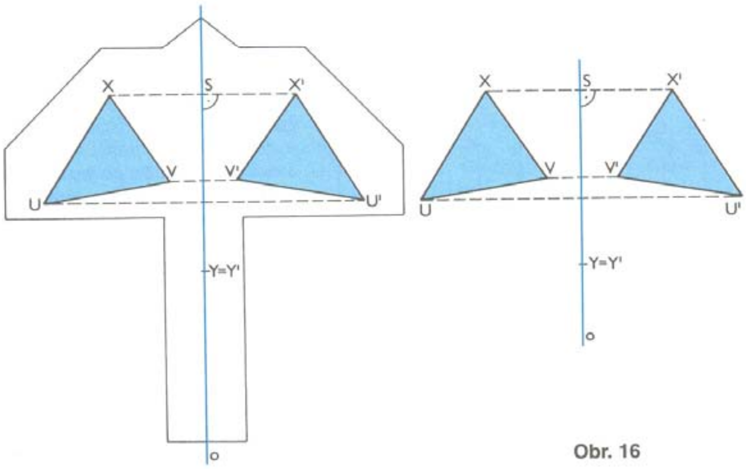


Obr. 14

Podobnou vlastnost, jakou má kresba vlaštovky, má mnoho předmětů kolem nás. Prohlédněte si například fotografii zámku ve Veltrusích na obr. 15. Překreslete jeho obrys na průsvitku a přeložte ho tak, aby se obě jeho části kryly.

Obr. 15

4 Na průsvitce s překreslenou vlaštovkou vyznačíme body **U**, **V**, **X**, **Y** (obr. 16). Modře vyznačíme přímku **o**, podle níž je možno vlaštovku přeložit tak, aby se obě její části kryly.
Papír přehneme podle modře vyznačené přímky a hrotem kružítka jej propíchneme v bodech **U**, **V**, **X**. Po rozložení papíru vidíme na druhém křídle vlaštovky tři nově vyznačené body. Podle vpichů v bodech **U**, **V**, **X** je označíme po řadě **U'**, **V'**, **X'**. Říkáme, že jsme **zobrazili** body **U**, **V**, **X** na body **U'**, **V'**, **X'**. Body **U**, **V**, **X** nazýváme **vzory**, body **U'**, **V'**, **X'** nazýváme **obrazy** bodů **U**, **V**, **X**.
Stejným způsobem přiřadíme libovolnému bodu úsečky UV bod úsečky U'V'. Říkáme, že jsme zobrazili úsečku UV na úsečku U'V',
Trojúhelníku UVX je přiřazen trojúhelník U'V'X'. Říkáme, že jsme zobrazili trojúhelník UVX na trojúhelník U'V'X'. Na rozevřené vlaštovce ho narýsujte.
Zvláštní postavení má bod **Y**. Jeho obraz se nám nepodaří znázornit hrotem kružítka. Na první pohled totiž vidíme, že po přeložení průsvitky podle přímky **o** zůstává bod **Y** na svém místě. Zapíšeme Y = Y' a čteme „bod Y se rovná bodu Y'".

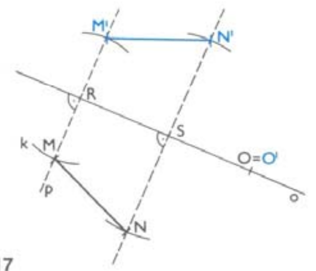


Obr. 16

Body, které se zobrazují samy na sebe a nemění tedy svou polohu, nazýváme **samodružné body**. Jsou to všechny body přímky **o**.
Zobrazení, které jsme popsali, nazýváme **osová souměrnost**. Přímka **o**, podle níž překládáme průsvitku, je **osa souměrnosti**.
Přeložení papíru je jeden ze způsobů přemístění obrazců, které jsou na něm narýsovány. Přeložením vlaštovky podle modré přímky přemístíme jednu polovinu vlaštovky na druhou tak, že se kryjí. Zároveň tím přemístíme úsečku UV na úsečku U'V', trojúhelník UVX na trojúhelník U'V'X'. V osové souměrnosti je tímto způsobem každý obrazec zobrazen na obrazec s ním shodný. Osová souměrnost je proto **shodné zobrazení**.
Trojúhelník UVX se po přeložení kryje se shodným trojúhelníkem U'V'X'. Papír s narýsovaným trojúhelníkem UVX jsme přeložením překlopili „lícem na rub". Znamená to, že trojúhelníky UVX a U'V'X' jsou **nepřímo shodné**. Osová souměrnost je **nepřímá shodnost**.
Všimněte si několika vlastností osové souměrnosti, které můžeme vypozorovat na naší vlaštovce:

5 Rozložte papír s vlaštovkou z obr. 16 a trojúhelníkem s ryskou se přesvědčte, že přímky UU', VV', XX' **jsou kolmé k přímce o**. Označíme **S** průsečík přímky XX' s osou **o**. Měřením se přesvědčte, že délky úseček XS a X'S se rovnají. Vyplývá to i ze skutečnosti, že obě úsečky se po přeložení papíru kryjí. Jsou tedy shodné a jejich délky se proto rovnají. To znamená, že **bod S je středem úsečky XX'**. Podobně je průsečík přímky UU' s osou **o** středem úsečky UU'. Průsečík přímky VV' s osou **o** je středem úsečky VV'.
Rozložením nebo složením papíru s vlaštovkou se přemístí všechny body roviny, kromě bodů osy **o**. Osa **o** nezmění svou polohu a nezmění ji ani žádný její bod. **Všechny body osy o jsou samodružné**.

6 Narýsujte přímku **o** a vyznačte dva body **M**, **N**, které na ní neleží. Dále vyznačte bod **O**, který leží na přímce **o** (obr. 17).



Obr. 17

a) Narýsujte obrazy **M'**, **N'** bodů **M**, **N** v osové souměrnosti s osou **o**.

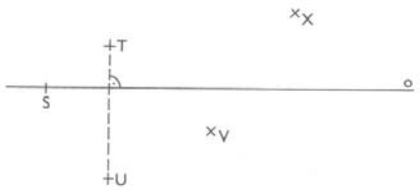
b) Narýsujte obraz M'N' úsečky MN v osové souměrnosti s osou **o**.
c) Vyznačte obraz bodu **O** v osové souměrnosti s osou **o**.

Řešení
a) Víme už, že obraz **M'** bodu **M** leží na přímce procházející bodem **M** a kolmé k ose **o**. Střed úsečky MM' je **patou** této **kolmice**. (Patou kolmice nazýváme průsečík přímky a k ní sestrojené kolmice.) Postup rýsování zapíšeme po jednotlivých krocích tak, abychom ho mohli kdykoli zopakovat. V hranaté závorce uvádíme jednodušší způsob zápisu pomocí matematických značek.
1. krok: Narýsujeme přímku **p** procházející bodem **M** a kolmou k ose **o** [p; $M \in p \perp o$].
2. krok: Vyznačíme bod **R**, který je patou kolmice **p** k ose **o** [R; $R \in p \cap o$].
3. krok: Sestrojíme kružnici **k** se středem **R** a poloměrem $|MR|$ [k; k (R; $|MR|$)].
4. krok: Vyznačíme průsečík **M'** kružnice **k** s přímkou **p**, který je různý od bodu **M** [M'; $M' \in k \cap p$, $M' \neq M$].
Přesvědčíme se, že bod **M'** splňuje všechny podmínky dané úlohy. Bod **M'** leží na kolmici k ose **o** procházející bodem **M**. Měřením se přesvědčíme, že jeho vzdálenost od bodu **R** je stejná jako vzdálenost bodu **M** od bodu **R**. Bod **R** je tedy středem úsečky MM'.
Podobně narýsujeme obraz **N'** bodu **N**.

b) Obrazem úsečky MN v osové souměrnosti s osou **o** je úsečka M'N'. Víme, že je s úsečkou MN shodná ($M'N' \cong MN$). Jejich délky se proto rovnají ($|MN| = |M'N'|$).
c) Bod **O** leží na ose **o**, je proto samodružný. Platí O = O'.

ZAPAMATUJTE SI

Obrazem úsečky MN v osové souměrnosti s osou **o** je úsečka M'N'. Říkáme, že úsečka M'N' je **souměrně sdružená** s úsečkou MN **podle osy o**.



Obr. 18

7 a) Podle obr. 18 narýsujte přímku **o** a vyznačte body **S**, **T**, **U**, **V**, **X**. Narýsujte obrazy **S'**, **T'**, **U'**, **V'**,

X' souměrně sdružené s body **S**, **T**, **U**, **V**, **X** podle osy **o**.
b) Co je v osové souměrnosti s osou **o** obrazem bodů **S'**, **T'**, **U'**, **V'**, **X'**?

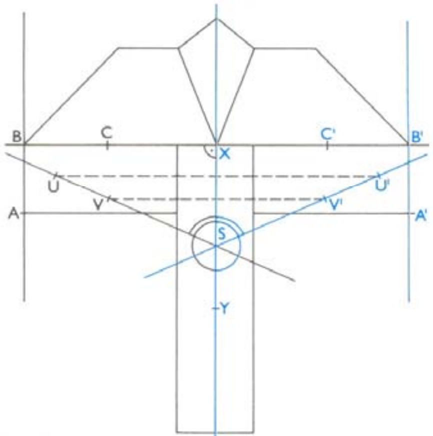
8 Narýsujte přímku **o** a bod **X**, který na přímce **o** neleží:
a) Narýsujte bod **X'**, který je obrazem bodu **X** v osové souměrnosti s osou **o**.
b) Narýsujte obraz bodu **X'** v osové souměrnosti s osou **o**.

Řešení
a) Narýsovat bod **X'** jako obraz bodu **X** v osové souměrnosti s osou **o** umíte.
b) Zopakujte postup konstrukce z příkladu a). Snadno se přesvědčíte, že obrazem bodu **X'** je bod **X**.

Z řešení předcházející úlohy plynou důležité poznatky:

V osové souměrnosti má každý bod roviny právě jeden obraz. Každému obrazu odpovídá právě jeden vzor. Sestrojíme-li obraz **X'** bodu **X** v osové souměrnosti a potom obraz bodu **X'** v téže osové souměrnosti, dostaneme původní bod **X**.

9 Narýsujte přímku **o** a vyznačte libovolný bod **R**, který na ní neleží.
a) Sestrojte obraz **R'** bodu **R** v osové souměrnosti s osou **o**.
b) Sestrojte obraz **R"** bodu **R'** v osové souměrnosti s osou **o**.
c) Co je obrazem bodu **R"** v osové souměrnosti s osou **o**?



Obr. 19

10 Vraťte se znovu k papírové vlaštovce. Po přeložení jejího obrázku (obr. 19) zůstane osa **o** na svém místě. Úsečka UV se zobrazí na úsečku U'V'. Úsečka AB se zobrazí na úsečku A'B'. To znamená, že i přímka UV se zobrazí na přímku U'V' a přímka AB se zobrazí na přímku A'B'.

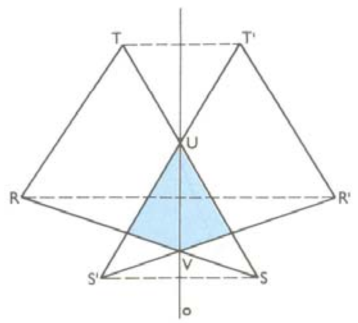
Narýsujete-li přesně přímky UV a U'V', zjistíte, že jejich průsečík **S** leží na ose **o** (obr. 19). Úhloměrem se přesvědčte, že úhly, které přímky UV a U'V' svírají s osou **o**, mají stejné velikosti ($|\sphericalangle USX| = |\sphericalangle U'SX|$, $|\sphericalangle YSV| = |\sphericalangle YSV'|$).
Přímka AB je rovnoběžná s osou **o** stejně jako její obraz – přímka A'B'.
Přímka BC je kolmá k ose **o**. Leží na ní proto i obrazy **B'**, **C'** bodů **B**, **C**. Říkáme, že přímka BC a její obraz B'C' splývají.

ZAPAMATUJTE SI

Obrazem přímky **p** v osové souměrnosti s osou **o** je přímka **p'**, pro kterou platí:
a) jestliže $\mathbf{p} \perp \mathbf{o}$, pak $\mathbf{p} = \mathbf{p'}$,
b) jestliže $\mathbf{p} \parallel \mathbf{o}$, pak $\mathbf{p'} \parallel \mathbf{o}$; vzdálenosti **p'** od **o** a **p** od **o** se rovnají,
c) jestliže $\mathbf{p} \nparallel \mathbf{o}$, pak $\mathbf{p'} \nparallel \mathbf{o}$ a průsečík **p** a **p'** leží na ose **o**; velikosti úhlů, které **p** a **p'** svírají s osou **o**, se rovnají.

11 Narýsujte libovolný trojúhelník RST. Vyznačte bod **U**, který je bodem strany ST a bod **V**, který je bodem strany RS. Body **U**, **V** nesplývají se žádným vrcholem trojúhelníku RST. Narýsujte obraz R'S'T' trojúhelníku RST v osové souměrnosti s osou $\mathbf{o} = \leftrightarrow UV$. Společnou část vzoru a obrazu vybarvěte.

Řešení je na obr. 20.



Obr. 20

12 Narýsujte čtverec ABCD se stranou délky 5 cm. Vyznačte střed **S** strany AB. Narýsujte přímku SC a označte ji **o**.

1. Narýsujte čtverec A'B'C'D', který je souměrně sdružený se čtvercem ABCD podle osy **o**.

2. Společnou částí čtverce ABCD a jeho obrazu A'B'C'D' je čtyřúhelník SBCB'. Úhloměrem se přesvědčte, že jeho úhlopříčky BB' a CS jsou navzájem kolmé. Měřením se přesvědčte, že průsečík těchto úhlopříček je středem úhlopříčky BB'. Čtyřúhelník SBCB' připomíná papírového draka. Přímka SC je jeho jedinou osou souměrnosti. (V matematice nazýváme takový čtyřúhelník deltoid.)

3. Narýsujte čtverec ABCD se stranou délky 5,8 cm a vyznačte střed **S** jeho strany AD. Sestrojte obraz trojúhelníku SBC v osové souměrnosti, jejíž osou je přímka AD.

13 **1.** Narýsujte přímku **o** a kružnici **k** se středem S, který je od přímky **o** vzdálen 1,5 cm. Narýsujte obraz **k'** kružnice **k** v osové souměrnosti s osou **o**.

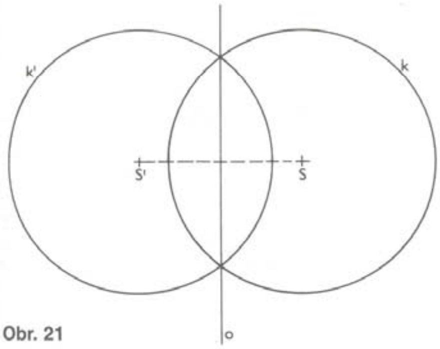
Řešení je na obr. 21. K sestrojení obrazu **k'** kružnice **k** stačí sestrojit obraz **S'** jejího středu S, protože poloměry obou kružnic se rovnají.

2. Narýsujte přímku **m** a kruh ***K*** ohraničený kružnicí **k** s poloměrem r = 2,8 cm a středem **S**, který je od přímky **m** vzdálen 1,6 cm. Sestrojte kruh ***K'*** souměrně sdružený s kruhem ***K*** podle osy **m**. Společnou část vzoru a obrazu kruhu vybarvěte.

14 Na obr. 22 je v soustavě souřadnic narýsován obrazec s vyznačenými body A [1;1], B [5;1], C [5;2], D [3;4], E [1;2], O [3;2]. Tento obrazec připomíná kresbu hvězdárny.

a) Určete souřadnice obrazů bodů **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **O** v osové souměrnosti, jejíž osou je přímka MN (M [7;2], N [7;6]).

b) Přerýsujte tento obrazec v soustavě souřadnic na volný list čtverečkovaného papíru a najděte jeho obraz v osové souměrnosti, jejíž osou je přímka RS (R [2;6], S [8;0]). Určete souřadnice obrazů bodů **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **O**.



Obr. 21

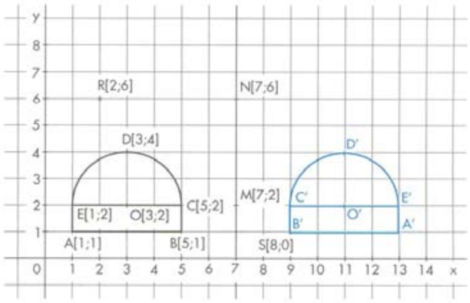
15 **1.** V soustavě souřadnic narýsujte přímku EF (E [6;1], F [6;5]). Najděte několik různých přímek, které se v osové souměrnosti s osou EF zobrazí samy na sebe.

2. Stejnou úlohu řešte pro osovou souměrnost, jejíž osou je přímka GH (G [1;4], H [10;4]).

16 **1.** V soustavě souřadnic narýsujte trojúhelníky ABC (A [1;1], B [4;1], C [1;4]) a A'B'C' (A'[5;5], B'[5;2], C'[2;5]). Trojúhelník A'B'C' je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti. Narýsujte její osu.

2. V soustavě souřadnic narýsujte trojúhelníky MNO (M [7;2], N [11;6], O [7;6]) a M'N'O' (M'[6;3], N'[10;7], O'[10;3]). Trojúhelník M'N'O' je obrazem trojúhelníku MNO v osové souměrnosti. Narýsujte její osu.

17 Narýsujte na průsvitku dvě různoběžné přímky **p**, **q**. Přímka **p** je obrazem přímky **q** v osové souměrnosti. Přeložením průsvitky určete její osu. Kolik má úloha řešení?



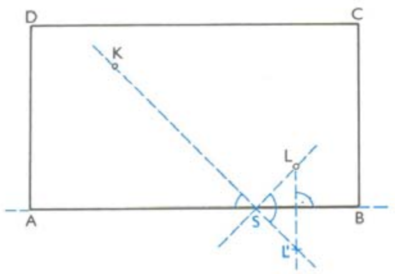
Obr. 22

18 Na některých obrázcích nebo fotografiích (například obr. 23 – zámek v Libochovicích) je možné

Obr. 23

za osu souměrnosti považovat přímku procházející břehem jezera, rybníku nebo přehradního jezera. V časopisech nebo knihách najděte obdobné fotografie budov, stromů, lidí zrcadlících se ve vodní hladině. Příslušné vzory a obrazy porovnejte. Přiložením hrany trojúhelníku naznačte osu souměrnosti. Jestliže při návštěvě obrazové galerie najdete obraz krajiny s rybníkem nebo jezerem, přesvědčte se (pouze okem a s náležitým odstupem od obrazu), že malíř znal vlastnosti osové souměrnosti.

19 Obdélník na následujícím obrázku představuje kulečníkový stůl. Body **K**, **L** určují polohu koulí K, L. Chceme, aby se koule K odrazila od okraje stolu a poté narazila do koule L. Najděte bod **S** na hraně AB kulečníkového stolu, v němž se koule K musí odrazit (obr. 24).

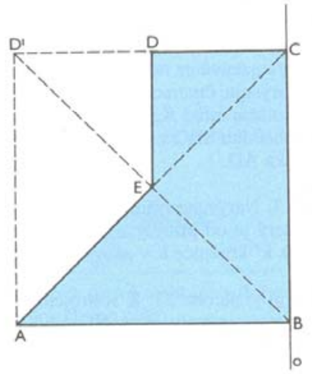


Obr. 24

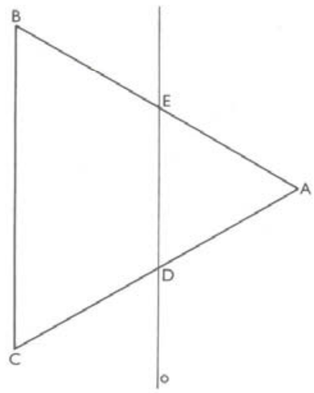
Řešení
Ze zkušenosti víte, že hokejový puk se odráží od mantinelu tak, že úhel odrazu je shodný s úhlem dopadu. Stejně tak úhel odrazu kulečníkové koule je shodný s úhlem jejího dopadu na hranu stolu v bodě **S**. Narýsujeme bod **L'**, který je obrazem bodu **L** v osové souměrnosti s osou AB procházející okrajem stolu. Z vlastností osové souměrnosti víme, že přímka L'S svírá s okrajem stolu stejný úhel jako přímka LS. Úhly KSA a BSL' jsou shodné, protože jsou vrcholové. Body **K**, **S**, **L'** leží proto na přímce. Stačí tedy sestrojit obraz **L'** bodu **L** v osové souměrnosti s osou AB. Hledaný bod **S** je průsečíkem přímek KL' a AB.

20 a) Podle obr. 25 narýsujte obrazec ABCDE, který je částí čtverce ABCD'; bod **D** je střed strany CD' a bod **E** je průsečík úhlopříček AC a BD', $|AB| = 5$ cm.
b) Sestrojte obrazec, který je souměrně sdružený s obrazcem ABCDE podle osy $\mathbf{o} = \leftrightarrow BC$. Vzor a obraz vybarvěte.
c) Vypočítejte obsah vybarveného obrazce.

21 a) Podle obr. 26 sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 6 cm. Dále sestrojte přímku **o** procházející body **D**, **E**, pro které platí: Bod **D** je středem strany AC a bod **E** středem strany AB.
b) Sestrojte trojúhelník A'B'C', který je souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC v osové souměrnosti určené osou **o**.
c) Vypočítejte obvod šestiúhelníku CDC'B'EB, který vznikl sjednocením vzoru (trojúhelníku ABC) a jeho obrazu (trojúhelníku A'B'C'). Uvedený šestiúhelník před výpočtem vybarvěte.



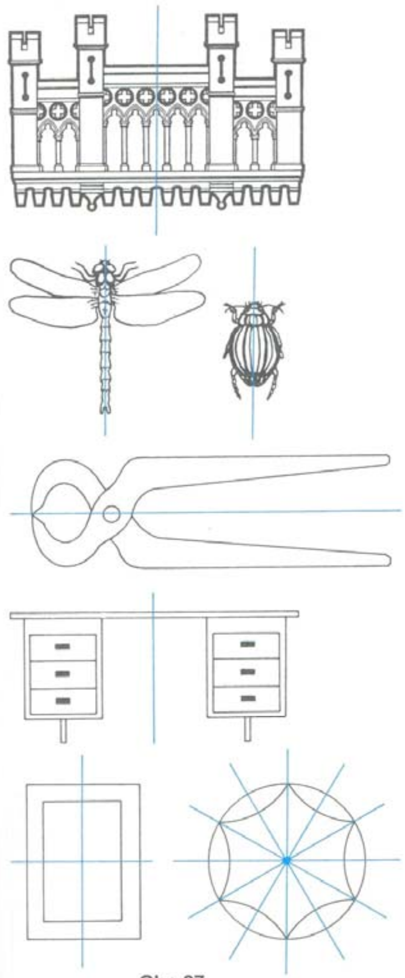
Obr. 25



Obr. 26

4.3. Osově souměrné obrazce

Vlaštovka na obr. 14 má následující vlastnost: V osové souměrnosti s osou **o** je obrazem libovolného bodu vlaštovky opět bod vlaštovky. Podle osy **o** můžeme vlaštovku přeložit tak, že se obě její části kryjí. Osovou souměrnost s takovou osou najdeme například u kreseb na obr. 27. Osy jsou na nich vyznačeny modře. Na obrázku kytaristy (obr. 3) takovou osu nenajdeme.

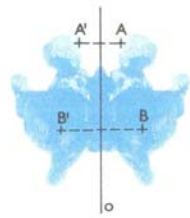


Obr. 27

ZAPAMATUJTE SI

Jestliže se v osové souměrnosti každý bod daného obrazce zobrazí do bodu tohoto obrazce, říkáme, že obrazec je **osově souměrný**. Říkáme také, že má **osu souměrnosti**.

1 **1.** Přeložte volný list papíru. Papír pootevřete a poblíž hrany vzniklé přeložením ukápněte štětcem barevnou kaňku. Po otevření papíru a zaschnutí vznikne útvar podobný obr. 28. Hrana papíru vzniklá přeložením znázorňuje přímku **o**. Vyznačte dva body **A**, **B** otisku znázorněného rozmazanou kaňkou a narýsujte jejich obrazy **A'**, **B'** v osové souměrnosti s osou **o**. Průsvitkou se přesvědčte, že obě části otisku oddělené přímkou **o** jsou shodné. Řekneme, že otisk je osově souměrný a že přímka **o** je jeho osou souměrnosti.

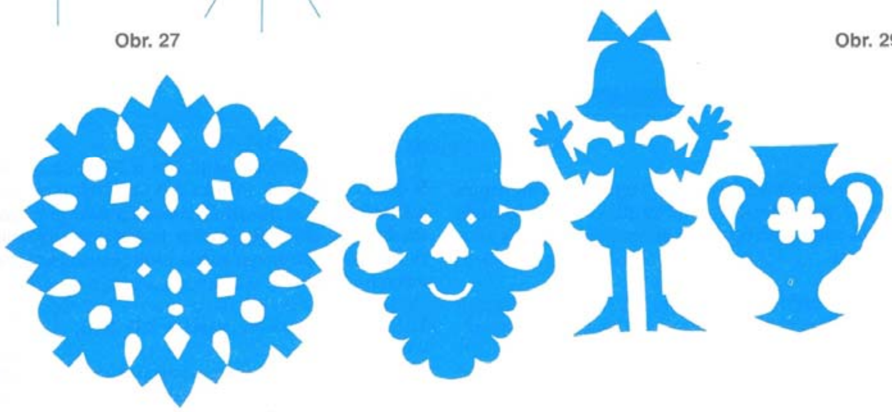


Obr. 28

2. Stejným způsobem vytvořte doma několik otisků a nalepte je do sešitů. Vyznačte jejich osy souměrnosti a dvě dvojice bodů souměrně sdružených podle této osy.

2 Naučte se vystřihovat osově souměrný džbán, ornament, panenku apod. z papíru podle obr. 29. Přímka, podle níž je papír přehnut, je osou souměrnosti.

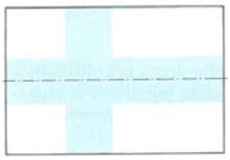
Obr. 29



3 Prohlédněte si v knihovně průvodce historickými památkami nebo fotografie zámků či kostelů a sami nakreslete podle své fantazie osově souměrnou budovu zámku nebo kostela, osově souměrné gotické okno, štít renezančního domu nebo portál. Jako vzor může sloužit obr. 30, na kterém je kresba zdvojeného renezančního okna ze 16. století (obr. 30a) nebo kresba barokního okna ze 17. století (obr. 30b).

Obr. 30

4 Najděte v atlasu vlajky některých států a určete, které z nich jsou osově souměrné (v úvahu berte i jejich barvy). Překreslete je na průsvitku a narýsujte jejich osy souměrnosti. Jako příklad uvádíme vlajky tří států na obr. 31. (Zdůvodněte, proč vlajka Hondurasu nemá vodorovnou osu souměrnosti.)



Finsko

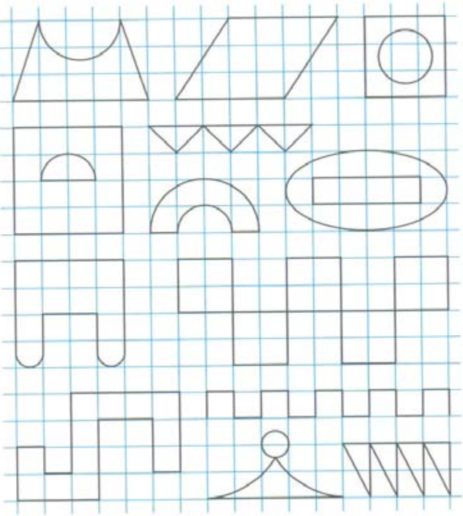
Honduras

Izrael

Obr. 31

5 Geometrické útvary na čtverečkovaném papíru (obr. 32) překreslete na průsvitku. Vyberte z nich osově souměrné útvary a narýsujte jejich osy souměrnosti.

6 **1.** Narýsujte libovolnou kružnici **k** se středem **S**. Bodem **S** narýsujte přímku **o**. Na kružnici **k** zvolte dva body **A**, **B** a najděte jejich obrazy **A'**, **B'** v osové souměrnosti s osou **o**. Přesvědčte se, že body **A'**, **B'** leží opět na kružnici **k**.



Obr. 32

Kružnice **k** je osově souměrná podle libovolné přímky procházející jejím středem.

2. Narýsujte libovolnou kružnici **l** se středem **R**. Dále narýsujte přímku **p**, která protíná kružnici **l** ve dvou bodech, ale neprochází středem **R**. Na kružnici **l** zvolte dva body **A**, **B**, které neleží na přímce **p**. Najděte jejich obrazy **A'**, **B'** v osové souměrnosti s osou **p**. Přesvědčte se, že body **A'**, **B'** neleží na kružnici **l**.

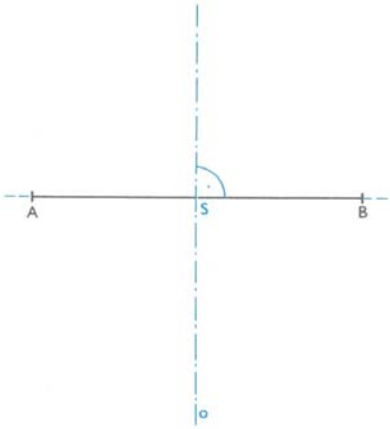
Kružnice **l** není osově souměrná podle přímky, která neprochází jejím středem.

7 Bez použití kružítka narýsujte osu souměrnosti úsečky AB ($|AB| = 6$ cm).

Řešení (viz obr. 33)
V osové souměrnosti, jejíž osu **o** hledáme, je bod **B** obrazem bodu **A**. Přímka AB musí být proto kolmá na hledanou osu **o**. Osa **o** musí dále procházet středem úsečky AB. Postup konstrukce zapíšeme (v závorce zapisujeme každý krok pomocí matematických značek):

1. krok: Narýsujeme úsečku AB [AB; $|AB| = 6$ cm].
2. krok: Pomocí měřítka vyznačíme střed **S** úsečky AB [S; $S \in AB$; $|SA| = |SB|$].

3. krok: Pomocí trojúhelníku s ryskou narýsujeme přímku **o** kolmou k přímce AB a procházející středem **S** [o; o ⊥ ↔ AB, S ∈ o].
V osové souměrnosti s osou **o** je bod **B** obrazem bodu **A**, bod **A** je obrazem bodu **B**. Zvolíme-li libovolný jiný bod úsečky AB, snadno se rýsováním přesvědčíme, že jeho obrazem je opět bod úsečky AB. Osa **o** je osou souměrnosti úsečky AB. Nazýváme ji **osa úsečky AB**.



Obr. 33

ZAPAMATUJTE SI

Osa souměrnosti **o** úsečky AB je kolmá k přímce AB a prochází středem **S** úsečky AB. Je to **osa úsečky AB**.

Osu souměrnosti útvarů složitějších než je úsečka hledáme následujícím způsobem: Útvar překreslíme na volný list papíru nebo na průsvitku a překládáním se snažíme najít přímku, která je jeho osou souměrnosti. Obě části útvaru se pak při přeložení průsvitky kryjí.

8 Na volný list papíru narýsujte:
a) úhel EVF, který má velikost $|\sphericalangle EVF| = 45°$.
b) úhel IVK, který má velikost $|\sphericalangle IVK| = 150°$.
Úhly vystřihněte a přeložením najděte jejich osy souměrnosti.

ZAPAMATUJTE SI

Osa souměrnosti každého úhlu prochází jeho vrcholem. Osa souměrnosti úhlu je **osou úhlu**.

9 Ze čtverečkovaného papíru vystřihněte čtverec a překládáním najděte všechny jeho osy souměrnosti. Osy pak narýsujte čerchovaně.

Řešení
Čtverec můžeme přeložit čtyřmi způsoby tak, že se obě jeho části kryjí. Všechny osy procházejí **středem čtverce**, jímž je průsečík úhlopříček. Dvě osy souměrnosti jsou zároveň osami dvojic protilehlých stran. Další dvě osy souměrnosti jsou zároveň osami dvojic protilehlých vnitřních úhlů.

10 **1.** Která písmena velké i malé abecedy
a) mají jednu osu souměrnosti,
b) mají dvě osy souměrnosti,
c) nemají žádnou osu souměrnosti?

A	B	C	Č	D	E	Ě	F	G
H	CH	I	J	K	L	M	N	O
P	Q	R	Ř	S	Š	T	Ť	U
V	W	X	Y	Z	Ž			

Obr. 34

2. Na obr. 35 jsou nakresleny části osově souměrných písmen s modře vyznačenými osami souměrnosti. Rozluštěte nápis.

Obr. 35

11 Ze čtverečkovaného papíru vystřihněte obdélník a překládáním najděte všechny jeho osy souměrnosti. Osy pak narýsujte čerchovaně.

Řešení
Obdélník můžeme přeložit dvěma způsoby tak, že se obě jeho části kryjí. Obě osy procházejí průsečíkem jeho úhlopříček. Obě osy souměrnosti jsou zároveň osami dvojic jeho protilehlých stran.

12 V soustavě souřadnic na čtverečkovaném papíru vyznačte body A [2;8], B [1;5], C [2;2], D [7;3]. Narýsujte šestiúhelník ABCDEF souměrný podle osy AD. Určete souřadnice vrcholů **E**, **F**. Šestiúhelník vystřihněte a přeložením se přesvědčte o správnosti svých řešení.

13 Osy souměrnosti obrazců můžeme snadno vyhledat pomocí kapesního zrcátka (obdélníkového tvaru).
1. Přečtěte pomocí zrcátka nápis na obr. 36.
2. Přikládejte zrcátko kolmo k rovině papíru s obrázky značek osobních automobilů na obr. 37. Porovnáváním částí obrázků značek nezakrytých zrcátkem na papíru a jejich obrazem v zrcátku snadno určíte osu (osy) souměrnosti. Znáte názvy automobilů těchto značek?

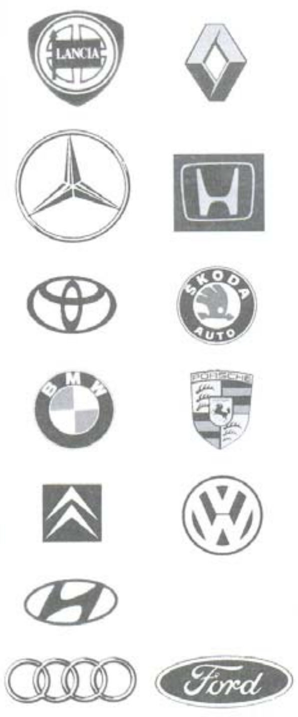
4.4 Rovinová souměrnost

Vzpomeňte si na film Císařův pekař a pekařův císař, ve kterém Jan Werich hraje císaře a pekaře zároveň. Ve scéně s rozbitým zrcadlem stojí císař před zrcadlem a pekař za zrcadlem se snaží dělat stejné pohyby jako císař. Císař si myslí, že se vidí v zrcadle, o němž neví, že je rozbité. Zkuste si podobnou scénku ve dvojicích zahrát.

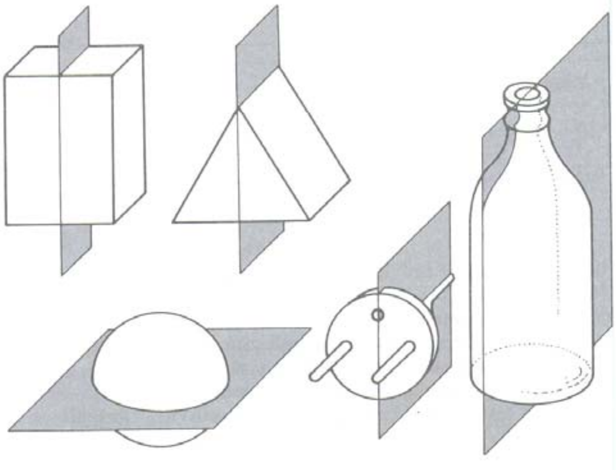
Obdobou osové souměrnosti rovinných útvarů je **rovinová souměrnost** prostorových útvarů. Pohybem dlaně naznačte rovinu, která dělí židli na dvě shodné části. Každá rovina procházející osou láhve ji dělí na dvě shodné části. Říkáme jí **rovina souměrnosti** tělesa. Podle roviny souměrnosti můžeme rozříznout trámek na dvě shodné části, rozseknout dřevěný špalíček nebo rozříznout sýrový „trojúhelníček" na dvě shodné části.

Obr. 36

1 **1.** Prohlédněte si kresby prostorových útvarů na obr. 38 a ukažte vyznačené roviny, které je dělí na stejné části.
2. Najdete ještě jiné roviny, které rozdělí dané útvary na stejné části? Jestliže ano, položte na ně průsvitky a tyto roviny vyznačte.



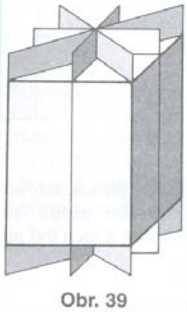
Obr. 37



Obr. 38

2 **1.** Prohlédněte si obr. 39, na kterém je vyznačen kvádr se čtvercovou podstavou a čtyři roviny. Každá z nich rozděluje kvádr na dvě stejné části. Vyznačte další rovinu s touto vlastností, která není na obrázku znázorněna.

2. Na papírové krabici od mléka nebo džusu hledejte roviny, které ji rozdělují na dvě stejné části.



Obr. 39

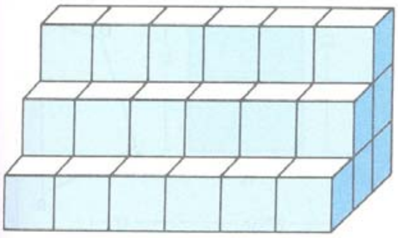
3 Najděte roviny souměrnosti stolu, třídy, krabice od křídy, zeměpisného globu, modelu letadla, hrnečku, květináče, brýlí, sluchátek, knihy apod.

4 Najděte roviny souměrnosti školních modelů krychle, kvádru, koule, válce, jehlanu, kužele.

Jestliže rovina rozděluje prostorový útvar na dvě stejné části, znamená to, že obě části mají stejný tvar i stejnou velikost. Říkáme, že jsou **shodné**. Pro jejich body platí:

Každý bod jedné části je zobrazen na bod druhé části tohoto útvaru. Každý bod druhé části je obrazem bodu první části útvaru. Vzory i obrazy bodů tedy patří danému útvaru. Jsou přitom stejně vzdáleny od roviny souměrnosti útvaru. O útvaru, který má tuto vlastnost řekneme, že je **souměrný podle roviny**.

5 **1.** Na obr. 40 je těleso složené z krychlí. Z kolika krychlí? Vymodelujte je a určete jeho rovinu souměrnosti.

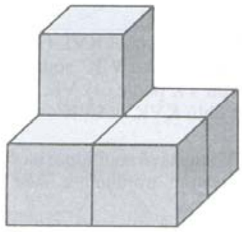


Obr. 40

2. Podle obr. 40 vymodelujte těleso nebo tělesa jemu podobná. Tělesa sestavujte ze stejných (shodných) krabic od mléka nebo džusu. Určujte jejich roviny souměrnosti.

6 **1.** Na obr. 41 je těleso složené z pěti krychlí. Vymodelujte je z krychlové stavebnice a určete jeho rovinu souměrnosti. Kolik rovin souměrnosti jste našli? Doplňte různými způsoby toto těleso jedinou krychlí tak, aby mělo více než jednu rovinu souměrnosti.

2. Těleso na obr. 41 vymodelujte z krabic od mléka nebo džusu. Řešte stejné úlohy jako v předchozím příkladu.



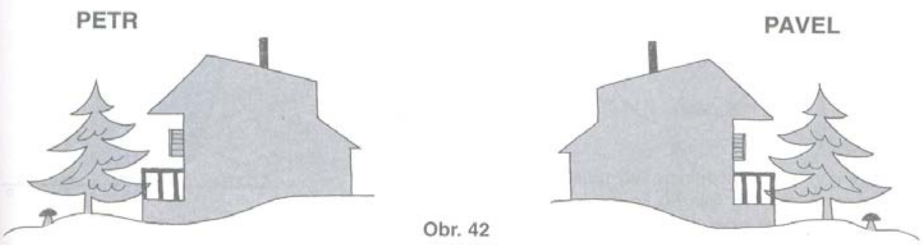
Obr. 41

Poznámka: Se souměrností se často setkáváme v přírodě a v životě kolem nás. Na obrázcích ryb, hmyzu, ptáků, stromů, květů snadno naleznete (pomocí zrcátka nebo překládáním papíru) osy souměrnosti. Rostlinám umožňuje souměrná stavba těla udržovat rovnováhu, živočichům usnadňuje pohyb. Sami dobře víte, jak obtížný je běh s těžkou taškou v jedné ruce. Také dopravní prostředky jsou konstruovány jako souměrné útvary. Letadla i lodě musí být souměrně nakládány. Vychýlené těžiště by totiž pohyb znesnadňovalo.

SOUHRNNÁ CVIČENÍ – 3. část

1 Petr a Pavel nakreslili siluetu domku, ve kterém byli o prázdninách (obr. 42). Je možné, že strávili prázdniny ve stejném domě? Svá tvrzení zdůvodněte.

2 Narýsujte na tabuli osy souměrnosti povrchu tabule nebo její části. Křídou narýsujte osy souměrnosti povrchu vaší lavice a části os souměrnosti podlahy vaší třídy.



Obr. 42

3 V soustavě souřadnic vyznačte body A [3;1], B [7;4], C [3;3], D [7;0], K [1;3], L [4;7], M [2;2], N [7;2].
a) Určete co nejvíce dvojic shodných úseček s vyznačenými krajními body.
b) Narýsujte přímku **o** = ↔ CM. Které úsečky určené vyznačenými body jsou souměrně sdružené podle osy **o**?
c) Určete některé další dvojice úseček, které jsou souměrně sdružené v určité osové souměrnosti. Ke každé takové dvojici určete příslušnou osu souměrnosti.
d) Které trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou tři z vyznačených bodů, jsou souměrně sdružené? Určete příslušnou osu souměrnosti.

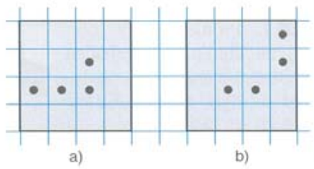
4 Narýsujte úhel KVL ($|\sphericalangle KVL| = 30°$). Narýsujte polopřímku V'K' souměrně sdruženou s polopřímkou VK podle osy VL. Bez úhloměru určete velikost úhlů KVK' a LVK'.

5 V soustavě souřadnic na čtverečkovaném papíru narýsujte trojúhelník ABC (A [0;3], B [3;0], C [4;4]).
a) Zjistěte, zda je trojúhelník ABC osově souměrný. Pokud ano, narýsujte jeho osu souměrnosti.
b) Narýsujte trojúhelník A'B'C' souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle osy AD (D [6;3]).
c) Určete souřadnice bodů **A'**, **B'**, **C'**.
d) Červeně narýsujte pětiúhelník ABC'CB'. Rozhodněte, zda je osově souměrný.

6 Na každém z obr. 43a,b,c,d) je narýsována kružnice **k** a její obraz **k'** v osové souměrnosti. Přiložte na obrázek průsvitku a narýsujte na ni příslušné osy souměrnosti.

7 Na obr. 44a,b) jsou plánky zahrad se čtyřmi vzácnými stromy označenými černými puntíky.

Obr. 44

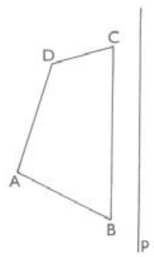


Každý plánek zahrady rozdělte podél linek čtverečkovaného papíru na čtyři shodné části tak, aby v každé z nich byl právě jeden vzácný strom.

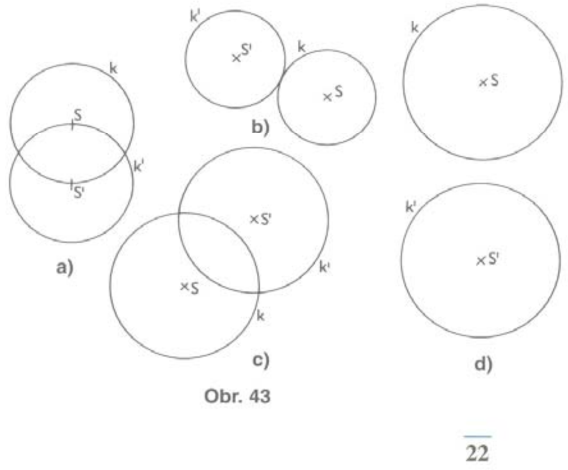
8 V soustavě souřadnic na čtverečkovaném papíru narýsujte přímku CD (C [4;8], D [4;1]) a bod A [1;2]. Určete souřadnice bodu **B** tak, aby trojúhelník ABC byl osově souměrný podle osy CD. Trojúhelník vystřihněte a přeložením papíru se přesvědčte o správnosti řešení.

9 Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou správná:
a) Každá kružnice je osově souměrná.
b) Každé dvě kružnice jsou souměrně sdružené podle určité osy.
c) Každé dva čtverce jsou shodné.
d) Některé dva trojúhelníky jsou shodné.
e) Některé dvě polopřímky jsou shodné.
f) Některé dvě polopřímky nejsou shodné.

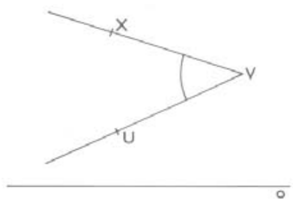
10 **1.** Podle obr. 45 narýsujte libovolný čtyřúhelník ABCD a přímku **p**, která je rovnoběžná s jeho stranou BC. Narýsujte obraz A'B'C'D' čtyřúhelníku ABCD v osové souměrnosti s osou **p**.



Obr. 45



Obr. 43

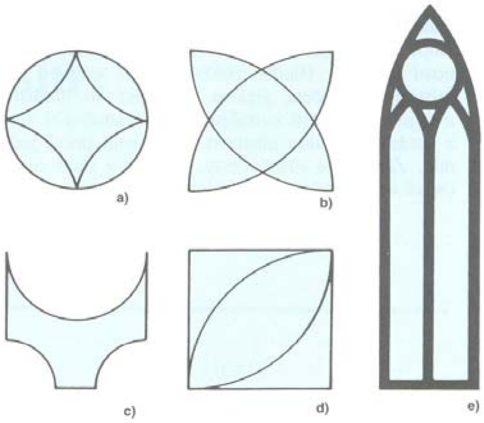


Obr. 46

2. Podle obr. 46 narýsujte libovolný ostrý úhel UVX a přímku **o**. Sestrojte úhel U'V'X' souměrně sdružený s úhlem UVX podle osy **o**.

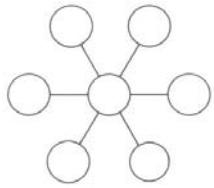
11 V soustavě souřadnic na čtverečkovaném papíru jsou dány vrcholy čtyřúhelníku ABCD (A [0;2], B [4;2], C [6;4], D [2;4]). Narýsujte přímku **o** procházející body M [1;1] a N [3;3]. Narýsujte čtyřúhelník A'B'C'D' souměrně sdružený s čtyřúhelníkem ABCD podle přímky **o**. Určete souřadnice bodů **A', B', C', D'**.

12 **1.** Rozhodněte, zda útvary na obr. 47 jsou osově souměrné. Pokud ano, vyznačte na průsvitce všechny jejich osy souměrnosti.
2. Na obr. 47e) je kresba gotického okna. Nakreslete podle svých představ nebo dalšího vzoru obrázek jiného gotického okna. Využijte přitom vlastností osové souměrnosti.



Obr. 47

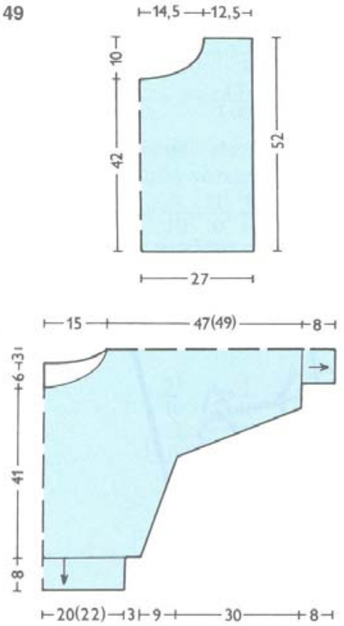
13 Vyznačte osy souměrnosti útvaru na obr. 48 a potom doplňte do kroužků jednociferná čísla tak, aby součty tří čísel ležících v přímce byly vždy stejné.



Obr. 48

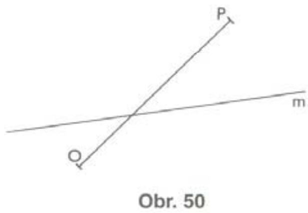
14 Čtyřúhelník EFGH má v soustavě souřadnic vrcholy E [2;1], F [6;1], G [6;8], H [2;3]. Přerýsujte ho na průsvitku. Průsvitku překlopte a vhodně ji otočte nebo posuňte tak, abyste na čtverečkovaném papíru vyznačili čtyřúhelník E'F'G'H' nepřímo shodný se čtyřúhelníkem EFGH. Volte takové přemístění, aby tři jeho strany ležely v linkách čtverečkovaného papíru. Určete souřadnice bodů **E', F', G', H'**.

Obr. 49



15 Střihy na obr. 49 jsou překresleny z časopisu Burda. Jsou to poloviny jednoho dílu dvou různých svetrů. Nakreslete obrázky celých dílů.

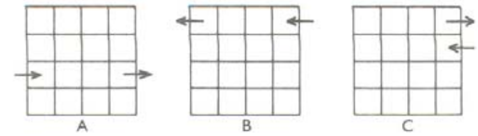
16 Podle obr. 50 narýsujte přímku **m** a úsečku OP. Narýsujte obraz O'P' úsečky OP v osové souměrnosti s osou **m**. Určete průsečík úseček OP a O'P'.



Obr. 50

17 Narýsujte dvě různoběžné přímky **o** a **p** (**o** $\not\parallel$ **p**). Sestrojte obraz **p'** přímky **p** v osové souměrnosti s osou **o**. Určete průsečík přímek **p** a **p'**.

18 Na obr. 51 jsou tři bludiště A, B, C bránící přístupu k pokladu. Čtverečky značí jednotlivé místnosti bludiště. Hledač pokladu musí vstoupit do místnosti označené šipkou směřující do bludiště a vyjít z místnosti označené šipkou směřující ven z bludiště. Každou místnost musí projít právě jednou. Zakreslete různé cesty, vyberte z nich cesty osově souměrné a určete jejich osy souměrnosti.



Obr. 51

PŘÍLOHA III

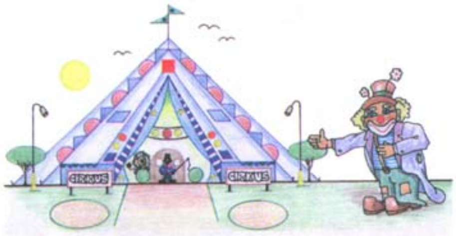
2. Osová souměrnost

1 Shodné útvary

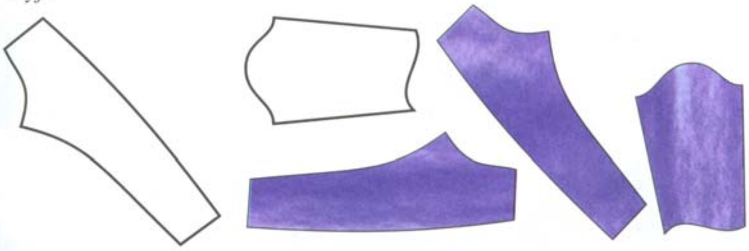
Využijeme obr. k motivaci kapitoly.

Poznatky žáků o osové souměrnosti, které byly intuitivně vytvářeny na 1. stupni ZŠ (OŠ), jsou rozvíjeny v motivačních úlohách. Vhodným východiskem je přitom představa shodných útvarů, která se upevňuje při přenášení útvarů pomocí průsvitky.
Vhodné je upozornit na zpřesnění terminologie: význam slov „shodný“ v hovorové řeči (stejný, identický, ...) a v matematice (vyjádřený definicí na straně 20).

Velmi často potřebujeme zjistit, jsou-li dva předměty, znaky apod. shodné. Například švadlena se snaží, aby překreslený střih na látce byl shodný s původním střihem.



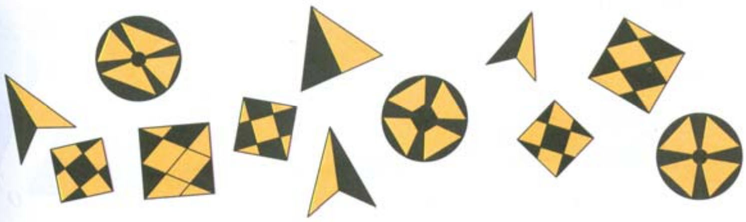
1 Pokuste se přesvědčit (překreslením na průsvitku), zda dané střihy se po přenesení kryjí.



Upozorníme žáky, že při překlopení průsvitky může být útvar shodný. Nezavádíme ale pojmy přímá a nepřímá shodnost. Diskutujeme užití - např. stříhání ze zdvojené látky.

2 Otisky prstů jsou velmi důležitým důkazovým materiálem kriminalistů. Otisk pravého palce zloděje je v rámečku. Poznáte, kdo z podezřelých, jejichž otisky jsou k dispozici, je hledaným zlodějem?

3 Komu se podaří najít dva shodné znaky?



Vysvětlit žákům, že hledají shodný tvar, velikost i barevný vzor.

Znaky nepřeklápíme.

Pozor, zde není náležité používat termín „shodné". Je vhodná diskuse s dětmi.

4 Které obrysy patří k daným řeckým amforám?

Poradit žákům, aby stříhali ze dvou listů papíru přiložených na sebe.

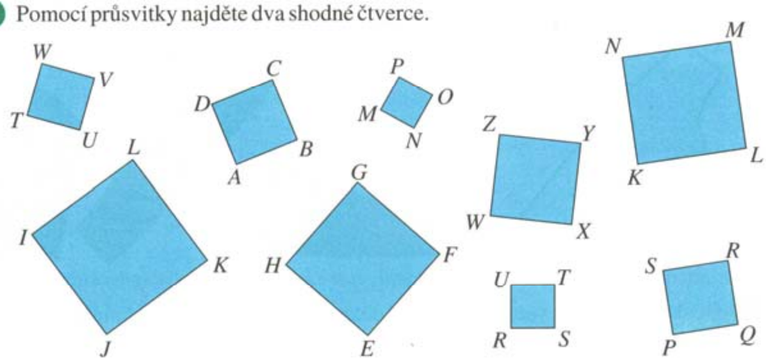
5 Vystřihněte dva libovolné shodné trojúhelníky.

Rovinné útvary jsou **shodné**, pokud je můžeme přemístit tak, že se přesně kryjí.

Žáci vypisují shodné čtverce.

Platí:
□EFGH ≅ □KLMN
□ABCD ≅ □PQRS

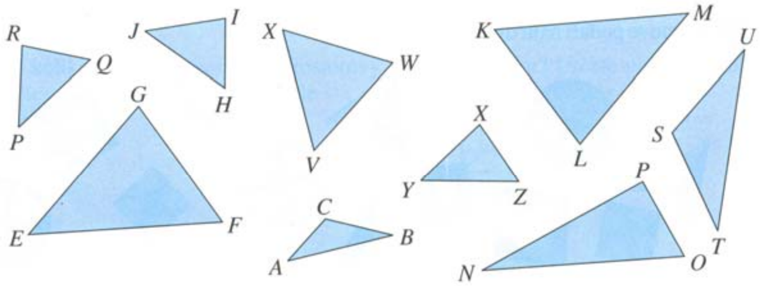
6 Pomocí průsvitky najděte dva shodné čtverce.



Shodnost útvarů zapíšeme: např. □*RSTU* ≅ □*UVXY*
Pokuste se zapsat shodnosti, pokud jste některé objevili.

Žáci používají průsvitku. Zapisují shodnost trojúhelníků, pozor na správné pořadí vrcholů.
△EFG ≅ △MKL,
△PQR ≅ △YZX ≅ △JHI

7 Podaří se vám najít na obrázku dva shodné trojúhelníky?



2 Osová souměrnost

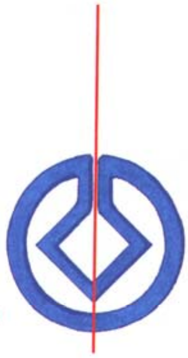
1 Jsou tyto obrázky souměrné podle naznačené přímky?

a)

b)

erb Litomyšle

c)



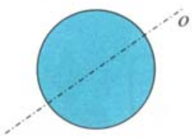
znak UNESCO

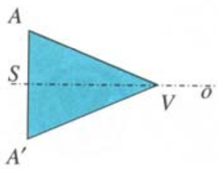
Osově souměrný útvar má dvě části vyznačené přímkou, která se nazývá **osa souměrnosti**. Podle ní lze obě části na sebe překlopit tak, že se kryjí.

Osová souměrnost je určena svou osou souměrnosti.

Osu souměrnosti budeme rýsovat čerchovaně.

Příklad 1:





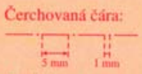
Žáci vyhledávají osově souměrné předměty či útvary - využijeme k motivaci tématu.

V jaké souvislosti je zde obrázek Bedřicha Smetany? Bedřich Smetana se narodil v Litomyšli.

Využijeme k motivaci. Žáci mohou vyhledávat v encyklopediích apod. různé erby měst či rodů. Následně u nich můžeme rozhodovat o souměrnosti osové, popř. i středové, kterou žáci intuitivně znají z 1. st. ZŠ.

Čárkovaná čára:

Čerchovaná čára:

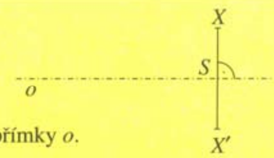


V dalším textu učebnice a pracovního sešitu nejsou tyto míry z grafických a věcných důvodů uplatňovány.

Provedeme s žáky diskusi: Bod S je střed úsečky AA', tedy $|AS| = |A'S|$, $AA' \perp o$

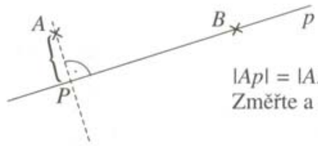
Je vhodné zařadit navazující cvičení z pracovního sešitu, žáci si upevní představu osové souměrnosti.

Úsečka XX' je souměrná podle osy o.
Platí $|SX| = |SX'|$
$XX' \perp o$



Délka úsečky $|SX|$ určuje vzdálenost bodu X od přímky o.
Zápis $|Xo| = |XS|$
Vzdálenost bodu X' od přímky o je určena délkou úsečky $|SX'|$.
Zápis $|X'o| = |SX'|$

Vzdálenost bodu A od přímky p hledáme vždy na kolmici k přímce p procházející bodem A.



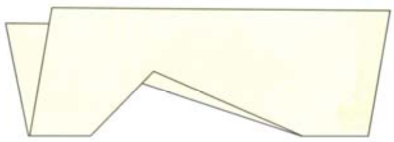
$|Ap| = |AP|$
Změřte a zapište: $|Ap| =$

Bod ležící na přímce má od této přímky nulovou vzdálenost. Např. $|Bp| = 0$

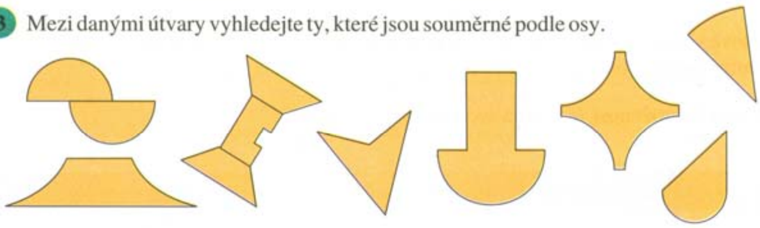
Takový útvar je deltoid.

Žáci postupují podle obrázku - vystřihnou „draka" a vyznačí osu souměrnosti (ohyb papíru). Mohou si všimnout, že úhlopříčky deltoidu jsou navzájem kolmé.

2 Pozorujte obrázek a zkuste vystřihnout tvar „draka".



3 Mezi danými útvary vyhledejte ty, které jsou souměrné podle osy.



Ve cvičebnici najdete navazující úlohu.

4 Loga některých známých automobilek jsou také souměrná podle osy, některá dokonce mají více os souměrnosti. Pokuste se tyto osy souměrnosti najít.
Která loga mají pouze jednu osu souměrnosti?

Osově souměrná jsou i velká písmena tiskací abecedy: **A, B, C, D ...**

5 Zjisti, zda všechna velká písmena tiskací abecedy jsou osově souměrná.

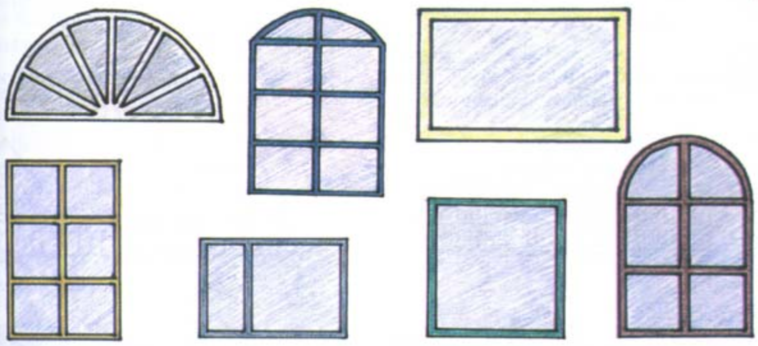
6 Mají některá písmena dvě osy souměrnosti? Která? Např. O, I.

7 Pokuste se najít české slovo, které zapsáno velkými tiskacími písmeny bude souměrné podle vhodně zvolené osy. Např. MIM.

8 Pokuste se najít další dopravní značky, které jsou souměrné alespoň podle jedné osy souměrnosti.

9 Dokreslete všechny osy souměrnosti u okenních rámů.

Smyslem zařazení úloh v kap. 2 není rýsování osově souměrných útvarů, ale vyhledávání os souměrnosti na obrázcích v učebnici, resp. určování os souměrnosti na obrázcích kreslených „od ruky" do sešitu.



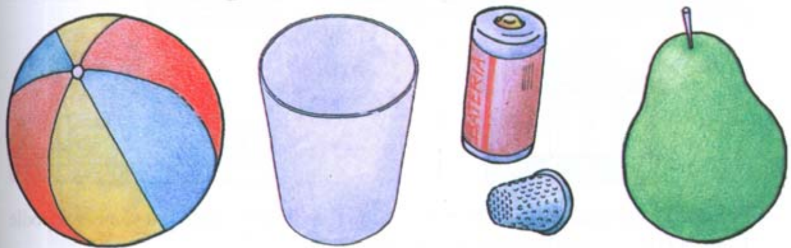
10 Podaří se vám najít číslo zapsané pomocí římských číslic tak, aby byl tento zápis souměrný podle osy? Např. MM , XIX.

Víme, že osově souměrné útvary v rovině mají osu souměrnosti. Podobně v prostoru existují souměrné prostorové útvary, které mají **rovinu souměrnosti** - jsou **souměrné podle roviny**. Říkáme jim **rovinově souměrné útvary**.

Rovinová souměrnost je rozšiřujícím učivem. Úlohy 12 a 13 umožňují rozvíjet prostorovou představivost žáků.

Využíváme analogie s osovou souměrností.

Obr. motivačně využijeme k následující úloze.



Upozorníme žáky na rozdíl ve výrazech „stejný" - v hovorové řeči a „shodný". Diskutujeme o tom, kdy je který z výrazů vhodnější.

V přírodě se objevuje souměrnost, která není dokonalá, přesto je krásná.

11 Hledejte příklady z přírody i objekty vytvořené člověkem, které jsou souměrné podle osy či roviny.

Vedeme žáky k rozlišování souměrnosti v rovině a v prostoru.

12 Rozhodněte, která z daných schémat historických objektů jsou souměrná podle osy. Jak je tomu ve skutečnosti?

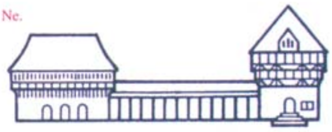
a) Ano.

b) Ano.

c) Ne.

d) Ano.

e) Ne.



f) Ne.

g) Ne.

h) Ano.

Pokuste se vyhledat na jednotlivých schématech prvky, které jsou souměrné podle jedné nebo i více os souměrnosti. Zdůvodněte.

3 Geometrické útvary osově souměrné

V této části se naučíme konstruovat osu souměrnosti různých geometrických útvarů. Možná se nám občas podaří najít i více os souměrnosti téhož útvaru.
Nejprve se podívejme na úsečku. Je každá úsečka souměrná podle osy?

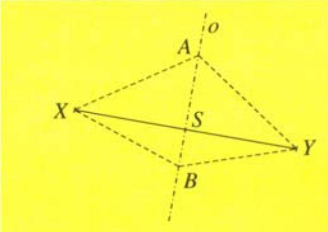
Příklad 1: Sestrojte úsečku XY délky $7\,cm$ ($|XY| = 7\,cm$).

Přehnutím listu papíru najděte osu úsečky.
Na ose (tedy na přehybu) zvolte libovolný bod A.
Změřte délku úsečky AX a AY a zapište.

Co jste zjistili? Platí to vždy? Ověřte své tvrzení alespoň pro další dva body.

Osa úsečky je k dané úsečce kolmá a prochází jejím středem.

Osa úsečky XY je přímka, jejíž libovolný bod má od krajních bodů úsečky XY stejnou vzdálenost.



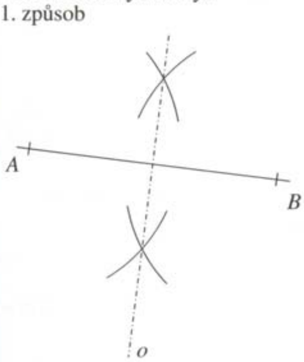
Co platí o poloze osy o a úsečky XY?
Co platí pro bod S?
Doplň zápisy (do sešitu):
Platí rovnost $|XS| = |YS|$? Proč?

a) $|Xo| =$ b) $|Yo| =$

Příklad 2: Sestrojte osu úsečky AB, $|AB| = 4{,}2\,cm$.

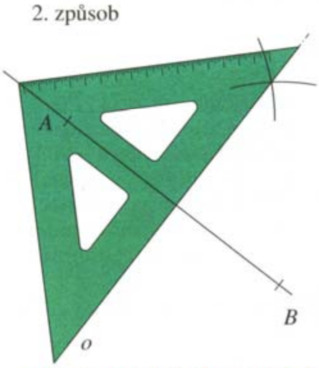
Konstrukce osy úsečky.

1. způsob



Osa úsečky je dána dvěma různými body.

2. způsob



Užíváme znalosti, že osa je kolmá k dané úsečce.

V kapitole se rozvíjejí konstrukční dovednosti žáků osvojené na 1. stupni ZŠ (OŠ). Vytváří se rovněž prostor pro užití experimentu a ověřování výsledků dosažených při provádění dalších činností geometrického charakteru (překládání papíru, měření ap.).

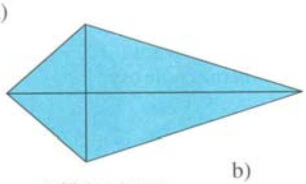
Žáci pracují na volném listu papíru.

Můžeme provést zápis vlastnosti.
$o \perp XY$

Opakujeme znalost o vzdálenosti bodu od přímky.
$|Xo| = |XS|$
$|Yo| = |YS|$

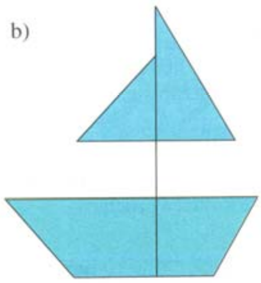
1 Které z úseček na obrázku jsou částí osy některé jiné úsečky?

a)



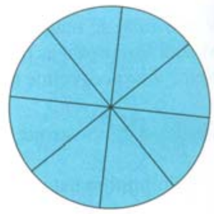
podélná osa je osou příčné úsečky

b)



dolní okraj plachty je osou stožáru a naopak

c)



kolmé úsečky jsou si navzájem osami

Procvičujeme přesné měření a rýsování.

2 Sestrojte osy úseček MN, CD a RS, je-li $|MN| = 7\ cm$, $|CD| = 5{,}5\ cm$, $|RS| = 6{,}3\ cm$.

3 Sestrojte úsečku UV, je-li $|UV| = 7{,}4\ cm$.

a) Určete v rovině bod X tak, aby platilo $|UX| = |VX| = 9\ cm$. Kolik takových bodů v rovině umíte sestrojit? Existují dva body.
b) Jaká musí být délka úseček UX a VX, aby úloha měla dvě řešení, jedno řešení, žádné řešení?
c) Kde leží všechny body X, pro které platí $|UX| = |VX|$? Všechny takové body leží na ose úsečky.

4 Narýsujte rovnostranný $\triangle PQR$ o straně velikosti $5{,}5\ cm$.

a) Narýsujte osu úsečky PQ.
b) Co platí pro bod R a narýsovanou osu? Bod R leží na ose.
c) Narýsujte osu úsečky PR.
d) Co jste zjistili? Vysvětlete.
e) Co bude platit pro osu úsečky RQ?
f) Kolik os souměrnosti má tento trojúhelník?
g) Co pro všechny sestrojené osy platí? Všechny tři osy procházejí společným bodem.

Ve cvičebnici naleznete úlohy na procvičení konstrukce os stran v různých trojúhelnících.

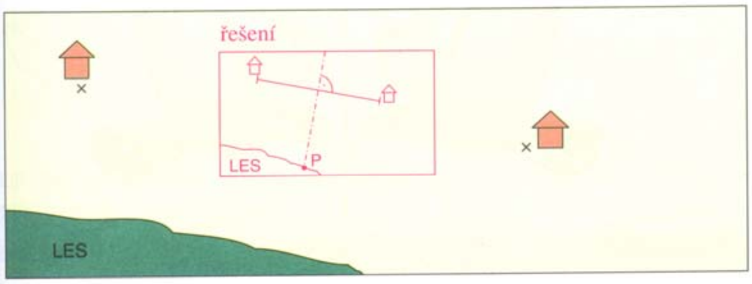
5 Narýsujte rovnoramenný $\triangle XYZ$, kde je základna $|XY| = 9\ cm$ a ramena $|XZ| = |YZ| = 6{,}7\ cm$.

Sestrojte osu základny $\triangle XYZ$.
Co lze o této ose říci? Osa základny je zároveň osou trojúhelníka.

6 Dva myslivci - kamarádi budují společný posed. Kde ho mají postavit, aby ho měli stejně daleko od svých chalup?

Upozorníme na to, že posed se staví obvykle na okraji lesa.

Situační plán revíru



Geometrické útvary mohou mít i více os souměrnosti. Přehnutím papírových modelů, které jste si už připravili, se o tom snadno přesvědčíte. S tímto poznatkem jsme se už setkali u jednoho trojúhelníku.
Který trojúhelník měl více os souměrnosti?
Existuje trojúhelník, který má právě jednu osu souměrnosti?
Existuje trojúhelník, který nemá ani jednu osu souměrnosti?

Zopakujeme zvláštnosti trojúhelníků co do počtu os souměrnosti.

7 Kolik os souměrnosti mají:
čtverec, obdélník, kruh, pravidelný šestiúhelník, rovnostranný trojúhelník, rovnoramenný trojúhelník?

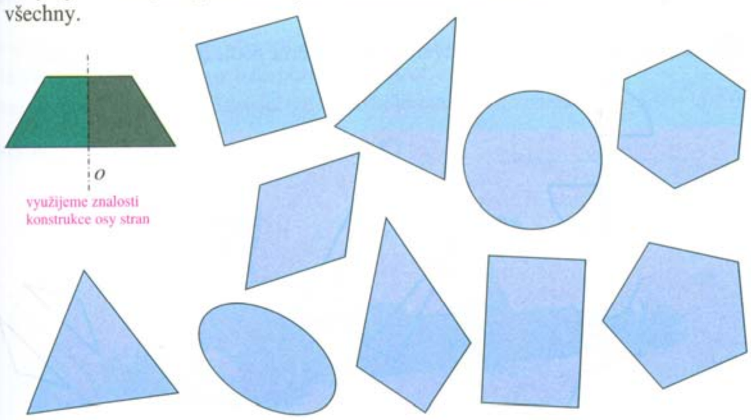
Čtverec 4, obdélník 2, kruh nekonečně mnoho, pravidelný šestiúhelník 6, rovnostranný trojúhelník 3, rovnoramenný trojúhelník 1.

Načrtni od ruky.

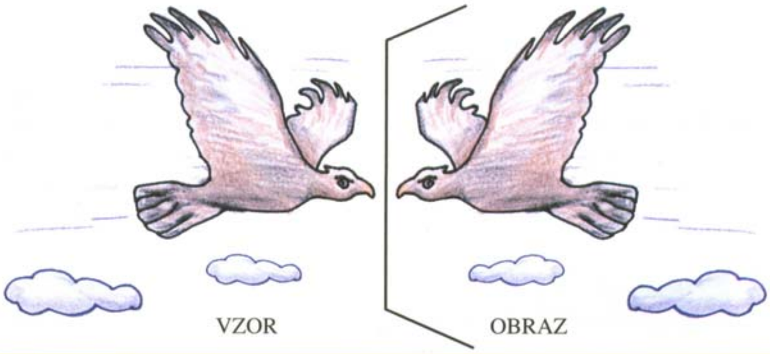
8 Narýsujte v daných geometrických útvarech osy souměrnosti. Pokuste se najít všechny.

Žáci pracují s vystřiženými modely tak, aby si přehnutím modelu ověřili svůj předpoklad.

Doporučujeme použít zvětšené kopie.



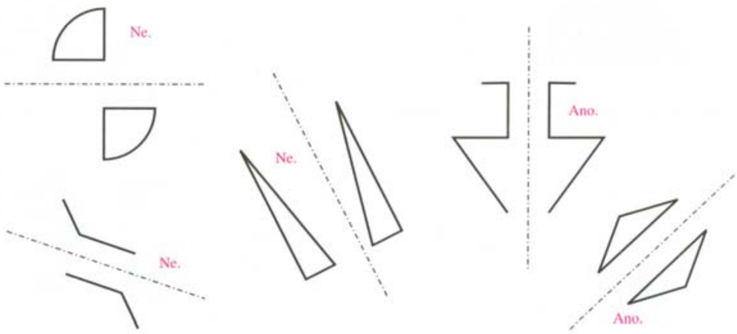
4 Útvary v osové souměrnosti



Na obrázku vidíte dva útvary v osové souměrnosti. Původní útvar je **vzor** a k němu existuje útvar souměrný podle osy *o*, který je s ním shodný. Říkáme mu **obraz**, protože vznikl zobrazením.

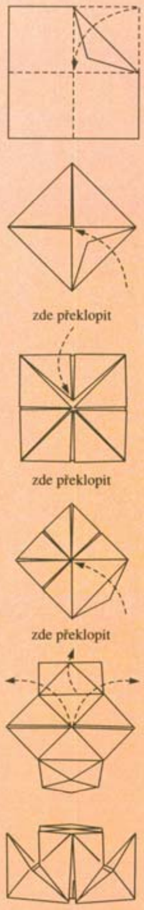
Je-li dvojice útvarů souměrná podle osy *o*, říkáme, že dané útvary jsou **souměrně sdružené** podle osy *o*.

1 Rozhodněte, které dvojice útvarů jsou souměrné podle osy *o*. Zdůvodněte.

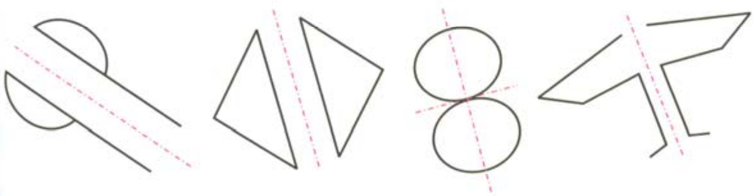


Kapitolu lze považovat za syntézu předchozích zkušeností a poznatků žáků o osové souměrnosti. Pojem osové souměrnosti jako shodného zobrazení se obohacuje zavedením nových termínů (vzor, obraz, útvary souměrně sdružené, samodružné body).

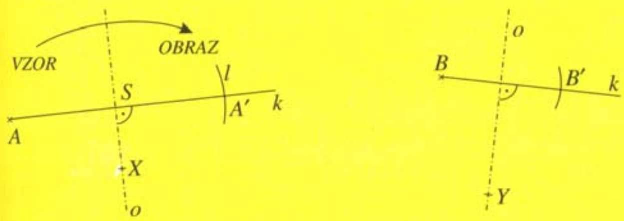
Postup skládání parníčku:



2 U následujících dvojic osově souměrných útvarů naznačte osu souměrnosti, která danou souměrnost určuje.



Sledujte, jak jsme k danému vzoru, bodu A, sestrojili jeho obraz, bod A', který je s bodem A souměrný podle osy o.



Postup:

1) Bodem A vedeme kolmici k na osu o.

2) Pomocí kružítka sestrojíme na kolmici k bod A' tak, aby jeho vzdálenost $|SA'|$ od osy o byla stejná jako $|SA|$.

Vysvětlíme stručný zápis postupu, podle vyspělosti žáků užíváme zkrácený zápis či slovní vyjádření.

Symbolický zápis:
1) k; $A \in k$, $k \perp o$
2) l; $l(S; |SA|)$
3) A'; $A' \in k \cap l$
Žáci se jej budou učit ve vyšších ročnících.

Zjistěte vzájemnou polohu osy o a úsečky AA', $B'B$.
Zjistěte, co platí o délkách úseček $|BY|$, $|B'Y|$, $|AX|$, $|A'X|$.

Bod A se v osové souměrnosti s osou o zobrazí do bodu A', který
- leží na kolmici k ose o procházející bodem A ($AA' \perp o$),
- má stejnou vzdálenost od průsečíku S této kolmice s osou o jako bod A ($|SA| = |SA'|$).

Co můžeme říci o bodu S vzhledem k úsečce AA'?

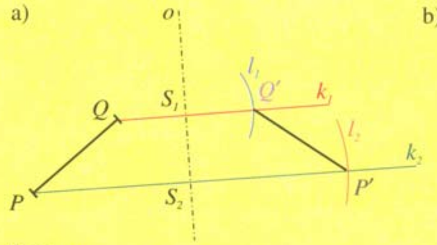
Podrobnější popis útvarů sestrojených v osové souměrnosti může žákům pomoci odlišit „útvary osově souměrné“ a „útvary sestrojené v osové souměrnosti podle osy *o*“. Intuitivně, bez užití terminologie, si mohou žáci povšimnout některých vlastností, např. involutonní dvojice bodů pro vzor - obraz, nebo nepřímé shodnosti útvarů narýsovaných v osové souměrnosti s osou *o*.

Postup:
1) k_1; $k_1 \perp o$, $Q \in k_1$
2) k_2; $k_2 \perp o$, $P \in k_2$
3) Q': $Q' \in k_1$; $|S_1Q'| = |S_1Q|$
4) P'; $P' \in k_2$; $|P'S_2| = |S_2P|$

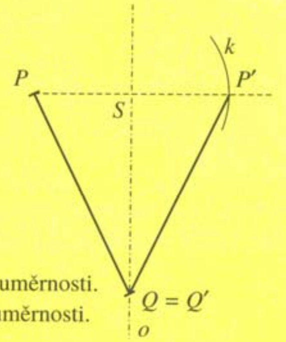
Příklad 1: Úsečku *PQ* zobrazte v osové souměrnosti určené osou *o*.

Řešení: V osové souměrnosti zobrazíme krajní body úsečky.

a)



b)



Postup:
1) Sestrojíme bod Q′ jako obraz bodu Q v osové souměrnosti.
2) Sestrojíme bod P′ jako obraz bodu P v osové souměrnosti.
3) Vyznačíme úsečku P′Q′.

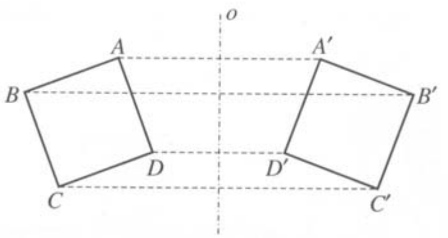
Podle vzoru zapište stručně postup u příkladu 1b).

Body, které leží na ose *o*, se v osové souměrnosti určené touto osou zobrazí samy na sebe. Říkáme jim **samodružné** body.

Poznámka: V příkladu 1b), kdy jsme získali samodružný bod *Q*, zapíšeme $Q = Q'$.

Příklad 2: Čtverec *ABCD* zobrazte v osové souměrnosti určené osou *o*.

Řešení: V osové souměrnosti zobrazíme každý vrchol čtverce *ABCD*.



$ABCD \cong A'B'C'D'$

S žáky hledáme i samodružné body.

3 Podle předchozí předlohy sestrojte úsečku *XY* ($|XY| = 6{,}5\ cm$) a zobrazte ji v osové souměrnosti. Volte alespoň tři různé polohy osy *o* vzhledem k úsečce *XY*.

4 Podle předchozí předlohy sestrojte čtverec *KLMN* ($k = 4\ cm$) a zobrazte ho v osové souměrnosti určené osou o, která
a) čtvercem *KLMN* neprochází,
b) prochází pouze vrcholem M,
c) prochází sousedními vrcholy *KL*,
d) prochází body S, T, které jsou středy sousedních stran čtverce *KLMN*.

Diskutujeme s žáky o počtu samodružných bodů. Používáme pojem nekonečně mnoho. Ten je vhodné ilustrovat i na jiných příkladech (kružnice, přímka).

5 Rozhodněte, kolik bodů čtverce *KLMN* v předchozím příkladě je samodružných.

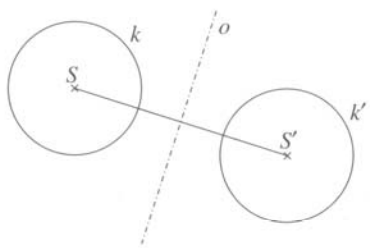
a) žádný, b) právě jeden - bod M, c) nekonečně mnoho - celá úsečka KL, d) nekonečně mnoho - celá úsečka ST

6 Ve cvičení 3 rozhodněte, kdy má úsečka *XY* nekonečně mnoho samodružných bodů. Situaci narýsujte.

7 Narýsujte dvě různoběžné přímky. Jednu z nich zvolte za osu osové souměrnosti a druhou v této osové souměrnosti zobrazte.

8 Jak zobrazíte kružnici v osové souměrnosti? Pozorujte obrázek. Co musí platit pro poloměry kružnic k a k'?

V případě potřeby upozorníme žáky, že stačí přenést střed kružnice k. Poloměr zůstává zachován - shodné zobrazení.

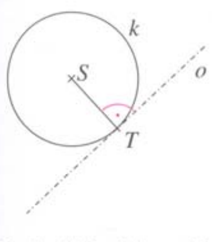


Pokuste se podobnou situaci narýsovat.

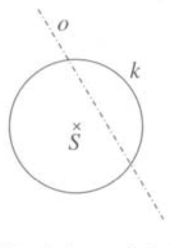
9 Zvolte osu souměrnosti dle předlohy a zobrazte danou kružnici v osové souměrnosti určené osou o.

Upozorníme žáky na speciální polohu osy, kdy je osa zároveň tečnou ke kružnici. Zavedeme pojem bod dotyku.

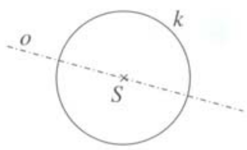
a)



b)



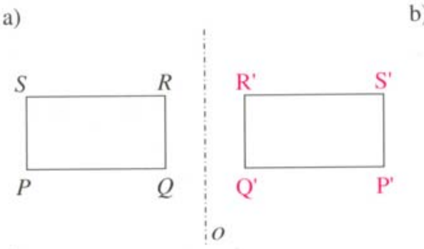
c)



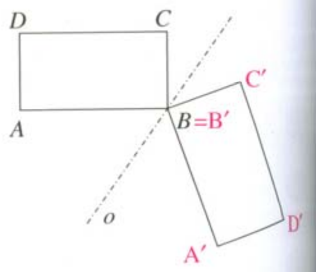
Rozhodněte, kdy mají tyto kružnice jeden společný bod, kdy dva, kdy žádný a kdy všechny. Bod T je bod dotyku.

10 Pozorujte obrázky, uvažujte o poloze osy *o* a popište všechny vrcholy obdélníků.

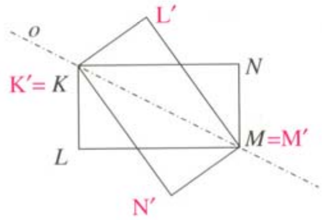
a)



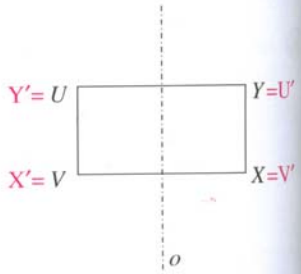
b)



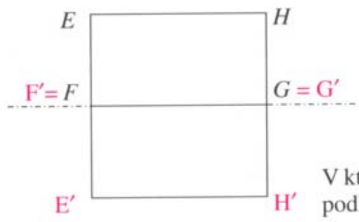
c)



d)



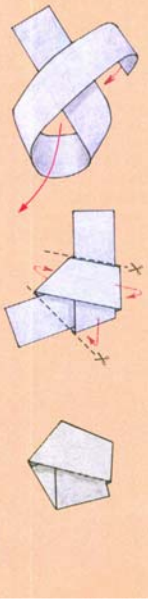
e)



V kterém případě lze říci: „Obdélník je souměrný podle osy *o*?"

Pokuste se narýsovat situaci b) a c) podle předlohy.

Postup, jak z proužku papíru získáme pravidelný pětiúhelník.



11 Sestrojte libovolný pětiúhelník *ABCDE* a zobrazte ho v osové souměrnosti s osou *o*

a) $o = CD$,

b) $o = AC$,

c) o, která prochází jedním z vrcholů pětiúhelníka.

5 Souhrnná cvičení

1 Narýsujte do sešitu přímku q a body A, B, C, D, E a F tak, aby platilo:
$|Aq| = 2\ cm$, $|Bq| = |Cq| = 4{,}1\ cm$, $|Dq| = 1{,}5\ cm$, $|Eq| = 0\ cm$, $|Fq| = 5{,}6\ cm$.

2 Doplňte písmena tak, aby byla uspořádána souměrně podle vyznačené osy a přečtěte si tajenku. Pracujte do sešitu.

Najdete tajenku ještě jinde než ve vyznačených polích?

Š	T	U	U	T	Š
V	I	C	C	I	V
O	M	K	K	M	O
P	S	U	U	S	P
Z	L	D	D	L	Z
A	J	T	T	J	A

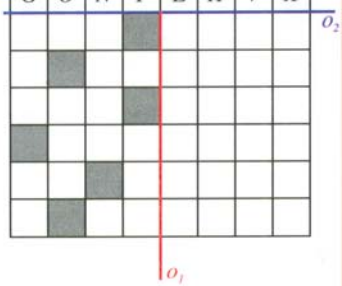
o

3 Narýsujte libovolný trojúhelník PQR tak, aby měl právě jednu osu souměrnosti.

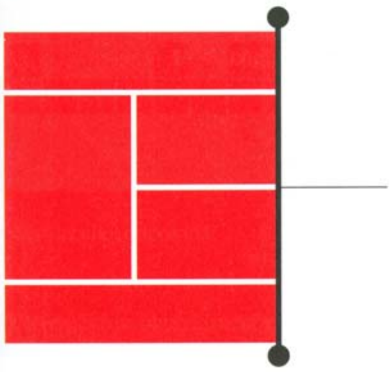
4 Odšifrujte tajenku. Tvořte obdobné šifrované zprávy.
Postup: Přerýsujte si obrázek ve zvětšení, vystřihněte vyšrafovaná okénka a také ta, která jsou s nimi souměrná podle osy o_1. Šablonku „překlopte" podle osy o_2 a přečtěte si tajenku.

Řešení: POPOKATEPETL

U	P	K	S	I	P	O	A
N	O	P	C	T	O	F	G
K	S	G	Y	F	U	D	A
N	R	A	T	E	N	Z	Q
M	P	A	S	U	B	E	O
G	O	N	T	L	H	V	X

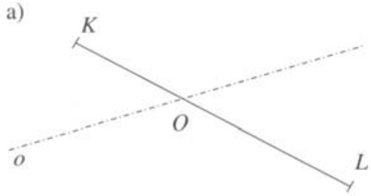


5 Přerýsujte obrázek do sešitu a dorýsujte pravou část tenisového kurtu.

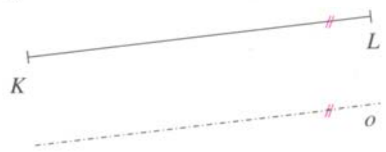


6 Narýsujte úsečku KL, $|KL| = 7\ cm$ a osu souměrnosti o (volte podle předlohy). Sestrojte obraz úsečky KL v osové souměrnosti s osou o.

a)



b)



Diskutujte možné tvary průniku.

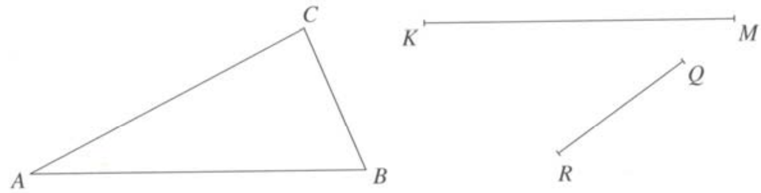
7 Sestrojte libovolný pětiúhelník. Osu souměrnosti o volte tak, aby procházela středy sousedních stran pětiúhelníku. Sestrojte obraz tohoto pětiúhelníku v osové souměrnosti s osou o. Vybarvěte průnik (společnou část) obou pětiúhelníků. Je tento průnik souměrný podle osy?

Ano - je souměrný podle osy.

8 Pomocí kružítka a pravítka se pokuste narýsovat tři zajímavé útvary souměrné alespoň podle jedné osy souměrnosti.

Upozorníme žáky na pořadí vrcholů.

9 Přerýsujte si obrázek do sešitu a dorýsujte trojúhelníky KLM a PQR tak, aby platilo $\triangle KLM \cong \triangle PQR \cong \triangle ABC$.



10 Narýsujte trojúhelník KLM o stranách $k = 4\ cm$, $l = 3\ cm$, $m = 5\ cm$ a jeho obraz v osové souměrnosti s osou o, která:

a) má s trojúhelníkem KLM společný pouze bod K,

b) nemá s trojúhelníkem KLM žádný společný bod,

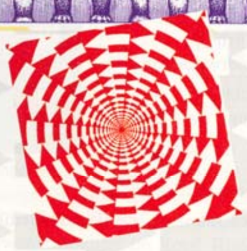
c) prochází středy dvou sousedních stran trojúhelníku KLM.

PŘÍLOHA IV

Spiegelung, Verschiebung Drehung

Wenn du dich aufmerksam umsiehst, kannst du in deiner Umwelt viele regelmäßige Figuren entdecken. Einige Beispiele hierzu findest du auf dieser Seite.

Solche regelmäßigen Figuren üben auf die meisten Menschen einen eigentümlichen Reiz aus, insbesondere dann, wenn sie zu Mustern angeordnet sind. Menschen, die gestalterisch tätig sind, z.B. Künstler oder Architekten, nützen diese Wirkung gerne aus. Bei den Elefanten auf dem Bild solltest du genau hinschauen. Es gibt da etwas Seltsames zu entdecken.

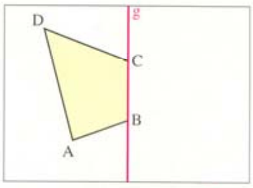


In diesem Kapitel wollen wir uns mit regelmäßigen, insbesondere symmetrischen Figuren beschäftigen. Wir werden auch lernen, wie man solche Figuren herstellt.

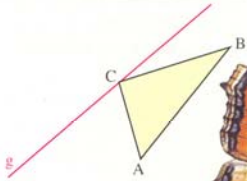
Geradenspiegelung – Achsensymmetrie

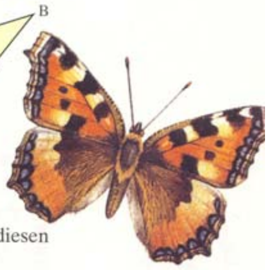
Aufgabe

1. a. Ergänze das Viereck ABCD zu einer achsensymmetrischen Figur mit der Symmetrieachse g.
Erkläre, wie man die andere Hälfte der Figur
(1) durch Falten,
(2) mithilfe des Geodreicks
erhält.
Färbe die Gesamtfigur.



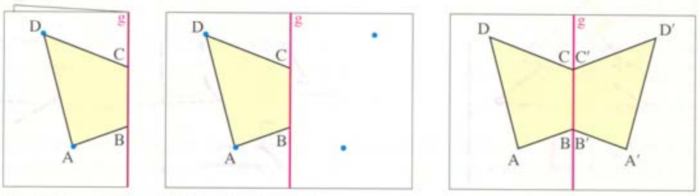
b. Gegeben sind eine Gerade g und ein Dreieck ABC. Zeichne mithilfe des Geodreiecks das Spiegelbild A′B′C′ des Dreiecks ABC bei der Spiegelung an der Gerade g.
Beschreibe die Konstruktion.





Lösung

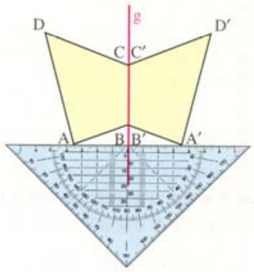
a. (1) Falte das Blatt längs der Symmetrieachse g.
Markiere die Eckpunkte und durchstich das doppelt liegende Blatt in diesen Punkten mit einer Nadel.
Falte dann das Blatt wieder auseinander und zeichne die fehlenden Verbindungsstrecken.



Auf diese Weise erhältst du das achsensymmetrische Sechseck ABA′D′CD.

(2) Die Punkte A und A′ sind Symmetriepartner; sie liegen symmetrisch zur Gerade g.
Das bedeutet:
- Die Punkte A und A′ liegen auf verschiedenen Seiten der Symmetrieachse g.
- Die Symmetrieachse g und die Verbindungsgerade AA′ sind senkrecht zueinander; zeichne also mit dem Geodreieck die Senkrechte zu g durch A.
- Der Punkte A′ hat von der Symmetrieachse g denselben Abstand wie der Punkt A.

Markiere so mit der Messskala des Geodreiecks den Punkt A′.

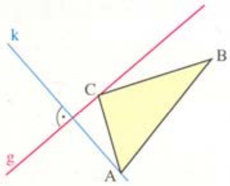


Entsprechendes gilt für die Punkte D und D′.

Der Punkt B liegt auf der Achse. Er ist Symmetriepartner von sich selbst. B und B′ fallen zusammen. Entsprechendes gilt für die Punkte C und C′.

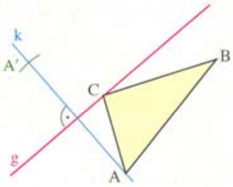
So erhältst du das achsensymmetrische Sechseck ABA′D′CD.

b. (1)



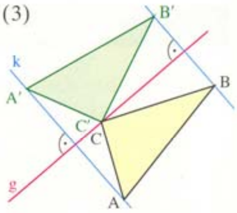
Zeichne die Senkrechte zu der Gerade g durch den Punkt A; nenne sie k.

(2)



Zeichne auf der Senkrechten k den Punkt A′ so, dass die Punkte A und A′ auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen und beide Punkte von g denselben Abstand haben.

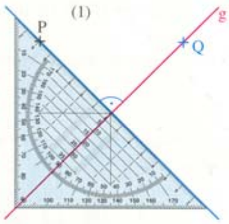
(3)



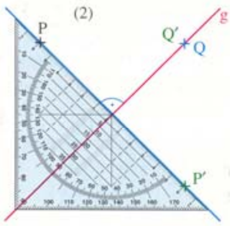
Zeichne den Bildpunkt B′ entsprechend. C′ und C fallen zusammen. Verbinde die Bildpunkte zum Bilddreieck A′B′C′.

Information

Eine **Achsenspiegelung** wird festgelegt durch eine **Spiegelgerade g.**
Zu einem Punkt P erhältst du den Bildpunkt P′ wie folgt:

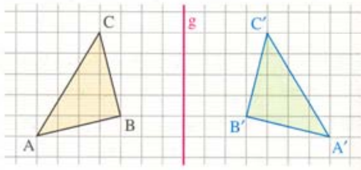


Zeichne die Senkrechte zur Spiegelgerade g durch den Punkt P.



Markiere auf der anderen Seite von g den Bildpunkt P′ so, dass er
- auf der Senkrechten liegt und
- von g denselben Abstand hat wie P.

Das *Bilddreieck* A′B′C′ entsteht durch **Spiegeln** des *Originaldreiecks* ABC an der **Spiegelgerade g.**

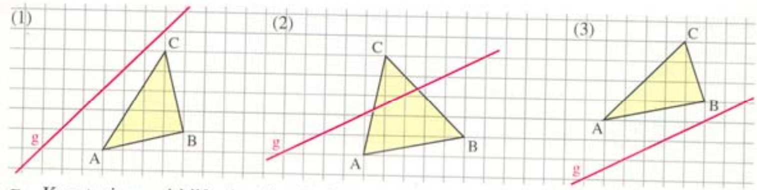


Zum Festigen und Weiterarbeiten

2. Betrachte die Figur in der Lösung von Aufgabe 1 a. Jeder Eckpunkt des Sechsecks hat bei der Spiegelung an der Spiegelgerade g einen Bildpunkt. Fülle die Tabelle aus.

Punkt	A	B	C	D	B′	C′
Bildpunkt						

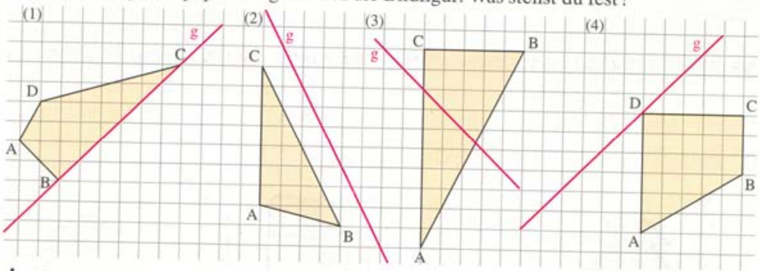
3. Stelle in der Aufgabe 1 einen Spiegel senkrecht zur Ebene auf die Spiegelgerade g. Was stellst du fest? Erläutere den Namen „Spiegelung“.

4. 

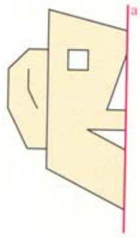
a. Konstruiere mithilfe des Geodreiecks das Bild A′B′C′ des Dreiecks ABC bei der Achsenspiegelung an der Gerade g.
Wähle weitere Punkte innerhalb und außerhalb des Dreiecks ABC und konstruiere auch ihre Bildpunkte.

b. Wie liegen die Geraden AA′, BB′ und CC′ (1) zur Spiegelgerade g; (2) zueinander?

5. a. Konstruiere die Bildfigur bei Spiegelung an der Gerade g. Zeichne die Originalfigur auf Transparentpapier. Lege sie auf die Bildfigur. Was stellst du fest?



b. In welchen Fällen in der Lösung zu Teilaufgabe a entsteht eine achsensymmetrische Gesamtfigur?



6. a. Rechts siehst du den Teil einer Maske. Zeichne die Figur mit dem Lineal nach Augenmaß ab und ergänze sie zu einer achsensymmetrischen Figur mit der Symmetrieachse a.

b. Spiegele die unter Teilaufgabe a erhaltene achsensymmetrische Figur an der Spiegelgeraden g. Was stellst du fest?

Information

(1) Eigenschaft von Originalfigur und Bildfigur

Die Lösung von Aufgabe 5a zeigt uns:

> Originalfigur und Bildfigur bei einer Spiegelung sind zueinander *deckungsgleich*; das bedeutet: Beide Figuren besitzen dieselbe Form und dieselben Maße.

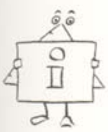
Hieraus folgt unmittelbar. Bei einer Achsenspiegelung sind:

- Originalstrecke und Bildstrecke gleich lang.
- Originalwinkel und Bildwinkel gleich groß.

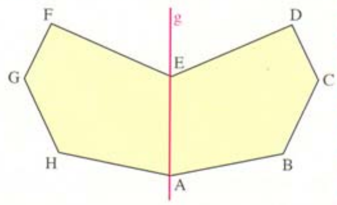
(2) Achsensymmetrie und Geradenspiegelung

Die Lösung der Aufgabe 6 zeigt den Zusammenhang zwischen **Achsensymmetrie** und **Geradenspiegelung**. Dies ermöglicht uns, die Achsensymmetrie einer Figur mithilfe der Geradenspiegelung zu erklären.

Information

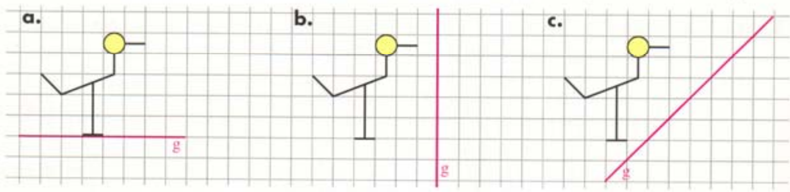


Wenn eine Figur bei einer Spiegelung an einer Gerade g mit sich zur Deckung kommt, dann ist die Figur **achsensymmetrisch.** Die Symmetrieachse ist die Spiegelgerade.

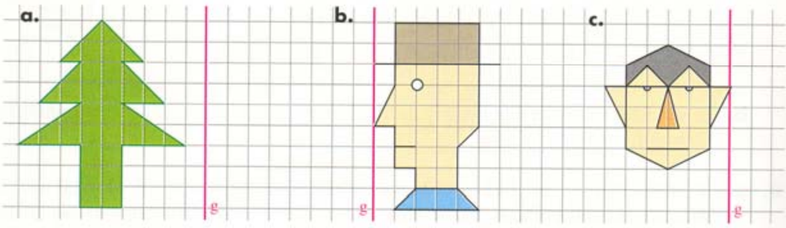


Übungen

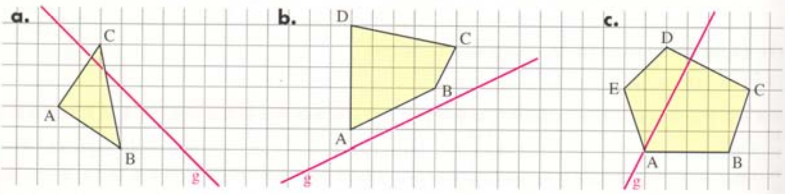
7. Zeichne die Figur ins Heft. Zeichne das Spiegelbild bei Spiegelung an der Gerade g.



8. Erzeuge symmetrisch zueinander liegende Figuren.



9. Zeichne die Figur ins Heft. Konstruiere das Bild des Vielecks bei Spiegelung an der Gerade g. Wie kann man die Genauigkeit der Konstruktion überprüfen?



10. Zeichne in ein Koordinatensystem das Dreieck ABC mit A(2|1), B(5|3) und C(3|5). Konstruiere das Bild des Dreiecks bei der Spiegelung an der Gerade PQ mit:

a. P(0|7) Q(5|5) **b.** P(3|5) Q(7|4) **c.** P(2|3) Q(4|4) **d.** P(2|1) Q(5|3) **e.** P(3|5) Q(5|1)

11. Zeichne ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 4 cm. Konstruiere dann das Bild des Quadrates bei Spiegelung an

a. der Gerade AB; **b.** der Diagonale AC; **c.** der Parallele zu BD durch C.

12. Zeichne ein Rechteck ABCD; die Seite $\overline{AB}$ soll 4,8 cm und die Seite $\overline{BC}$ 3,2 cm lang sein.
Konstruiere das Bild des Rechtecks bei Spiegelung an der Diagonale AC [BD].

13. Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M(4|3)$ und dem Radius $r = 2{,}5$ cm. Konstruiere dann das Bild des Kreises bei Spiegelung an der Gerade PQ mit:

a. $P(9|1)$, $Q(5|7)$ **b.** $P(1|6)$, $Q(7|3)$ **c.** $P(6|1{,}5)$, $Q(9|5{,}5)$

14.

Hier siehst du einige achsensymmetrische Figuren aus der Natur.

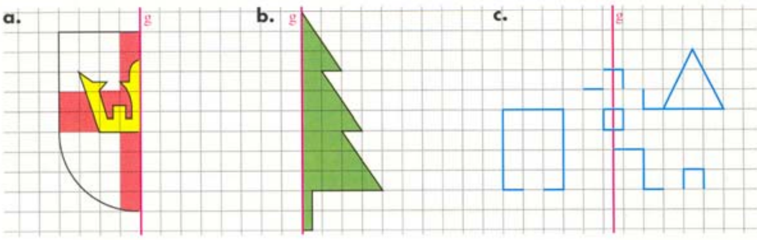
a. *Gehe auf Entdeckungsreise:* Gib achsensymmetrische Figuren aus deiner Umwelt an. Denke an Spielfelder beim Sport, bei Brettspielen, an Firmenzeichen (z. B. von Autos), an Verkehrsschilder und an Wappen.

b. Welche Ziffern sind achsensymmetrisch?

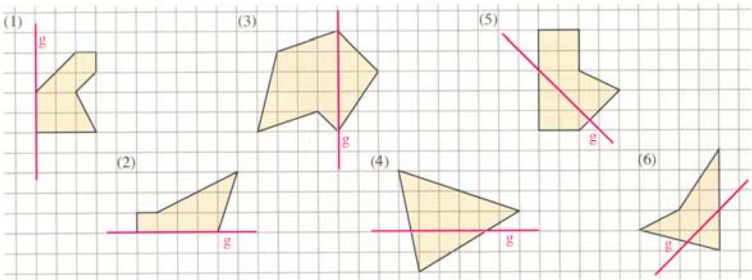
c. Welche Großbuchstaben der Druckschrift sind achsensymmetrisch?

d. Gib Worte wie UHU und Zahlen wie 808 an, die achsensymmetrisch sind.

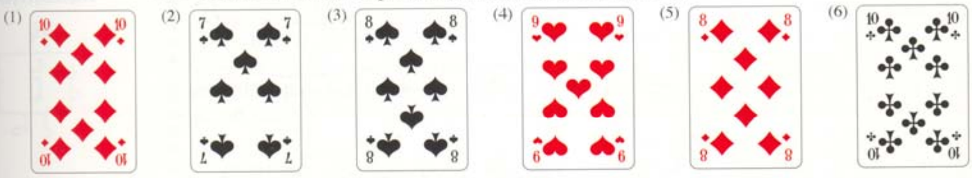
15. Ergänze durch Geradenspiegelung zu einer achsensymmetrischen Figur.



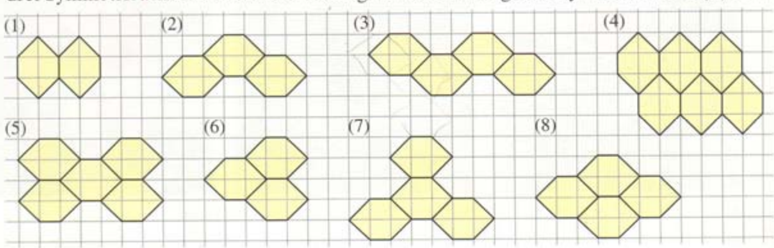
16. Stelle ein achsensymmetrisches Vieleck mit der Symmetrieachse g her.



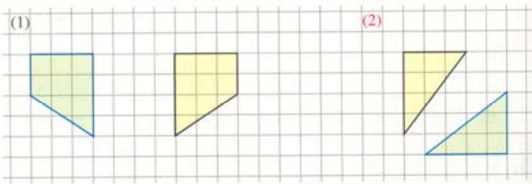
17. Untersuche, ob die Spielkarten achsensymmetrisch sind.



18. Betrachte die Teilfiguren aus einem Wabenmuster. Welche der Figuren haben eine, zwei, drei Symmetrieachsen? Zeichne diese Figuren ab und trage die Symmetrieachse(n) ein.



△ **19.** Die grüne Figur ist durch eine Spiegelung aus der gelben Figur entstanden. Zeichne die Spiegelgerade.



△ **20.** Markiere die Punkte P und P′ in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm). Konstruiere dann eine Gerade g so, dass P′ das Bild von P bei Spiegelung an g ist.

a. P(0|2), P′(5|1) **b.** P(2|0), P′(6|4) **c.** P(7|3), P′(2|4)

△ **21.** Gegeben sind in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) das Dreieck ABC mit A(3|2), B(6|5) und C(1|6) sowie das Bild A′ bei der Spiegelung an einer Gerade g. Konstruiere die Gerade g sowie das Bilddreieck A′B′C′.

a. A′(9|0) **b.** A′(7|4) **c.** A′(6|5) **d.** A′(4|4) **e.** A′(2|4) **f.** A′(5|5)

22. Zeichne das Dreieck ABC in ein Koordinatensystem. Spiegele das Dreieck an der Gerade g. Bezeichne die Bildpunkte. Trage alle fehlenden Koordinaten ein.

Dreieck	Spiegelung an g	Bilddreieck
A(3|4)		A′( )
B(8|1)		B′( )
C(7|7)		C′( )